

PHYSIKALISCHE *Verhandlungen*

AUTORENREFERATE UND TAGUNGSBERICHTE

VERBAND DEUTSCHER PHYSIKALISCHER GESELLSCHAFTEN

ÖSTERREICHISCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

ASTRONOMISCHE GESELLSCHAFT

DEUTSCHE METEOROLOGISCHE GESELLSCHAFT

DEUTSCHE GEOPHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE OPTIK

DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ELEKTRONENMIKROSKOPIE

GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

SEKTION FÜR KRISTALLKUNDE DER DT. MINERALOG. GES.

1954

5. JAHRGANG

2



Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik
und Mechanik in München

PHYSIK

PHYSIK VERLAG

MOSBACH · BADEN

Entwicklung der Zeitschrift

1944 wurden die PHYSIKALISCHEN BLÄTTER im Auftrag der Deutschen Physikalischen Gesellschaft herausgegeben. Bald nach Kriegsende — schon im Jahre 1946 — konnten sie als erste Zeitschrift ihres Fachgebietes wiedererscheinen. Der Herausgeber gab ihr die Aufgabe, durch Berichte, Nachrichten und Aussprache über wissenschaftliche Tagesfragen der Erhaltung und Entwicklung des naturwissenschaftlichen Lebens zu dienen.

In den folgenden Jahren entwickelten sich die PHYSIKALISCHEN BLÄTTER unter einem beratenden Kuratorium führender Wissenschaftler zu einer auch im Ausland anerkannten Monatsschrift. Bewußt arbeitet die Zeitschrift daran, trotz der Notwendigkeit einer gewissen Spezialisierung eine breite allgemeine Basis der Zusammenschau zu erhalten. Viele namhafte Autoren sorgen dafür, daß jeweilige hochwertige Einführungen in die allgemein interessierenden Fragen von Sondergebieten erscheinen können, so daß die Zeitschrift auch lesbar für jene Kreise ist, die nicht gerade auf diesem Spezialgebiet tätig sind.

Zu den Mitarbeitern der Zeitschrift in den zurückliegenden 10 Jahren gehörten unter vielen anderen:

E.N. da C. Andrade
P. M. S. Blackett
W. L. Bragg
W. Braunbek
P. W. Bridgeman
L. de Broglie
E. Buchwald
J. D. Cockroft
K. T. Compton
V. E. Cosslett
H. Ebert
J. Eggert
A. Einstein
W. Finkelburg

G. Gamow
P. Grassmann
W. Hanle
W. Heisenberg
P. Jordan
W. Kossel
L. Langmuir
M. v. Laue
H. Margenau
Ph. Morrison
M. Planck
R. W. Pohl
M. Polanyi
C. F. Powell

L. Prandtl
E. M. Purcell
C. Ramsauer
H. Schimankl
H. Siedentopf
A. Sommerfeld
H. Staudinger
S. Tolansky
K. W. Wagner
E. T. S. Walton
W. Westphal
K. Wirtz
H. Yukawa
J. Zenneck

Die Subskriptionsfrist läuft am 31.12.1954 ab. Für viele Hochschul- und industrielle Fachbibliotheken bietet sich die besondere Gelegenheit, diese anerkannte deutsche Fachzeitschrift vollständig zu besitzen und durch laufenden Bezug einen ständigen Kontakt zur deutschen physikalischen Wissenschaft zu erhalten.

Die Lieferung kann nach Abschluß des laufenden Jahrgangs zu nachstehenden Bedingungen erfolgen:

PHYSIKALISCHE BLÄTTER

J a h r g a n g 1 — 10 / 1944 — 1954

In Einzelheften DM 200.—

In gebundenen Jahrgängen DM 250.—

zuzüglich Versandkosten.

Jeder Besteller erhält das 10-Jahresregister kostenlos.

Bestellungen durch jede deutsche Buchhandlung oder direkt an

PHYSIK VERLAG - MOSBACH (BADEN)

H i e r a b t r e n n e n

Hiermit bestellen wir auf Grund Ihres Subskriptionsangebotes

..... Exemplar(e)

PHYSIKALISCHE BLÄTTER

J a h r g a n g 1 — 10 / 1944 — 1954

In Einzelheften*)

zum Preise von

DM 200.—

In geb. Jahrgängen*)

zum Preise von

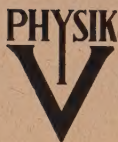
DM 250.—

zuzüglich Versandgebühren

.....
Name bzw. Firma des Bestellers

.....
genaue Versandanschrift

*) Nichtgewünschtes bitte durchstreichen



Hiermit bestelle ich die Monatsschrift
PHYSIKALISCHE BLÄTTER
für die Dauer eines halben/ganzen*
Jahres zum Preise von DM 6.75 für
das Vierteljahr zuzügl. Versandkosten

Lieferung soll durch den Verlag/Buchhandlung*
erfolgen.

POSTKARTE

An den

.....
Vor- und Zuname/Firma

.....
Beruf, Titel

.....
Postleitzahl/Wohnort

.....
Straße und Hausnummer

PHYSIK VERLAG

(17a) Mosbach/B

*Nichtgewünschtes durchstreichen. Deutliche Schrift
erbeten.

Jahrestagung der GAMM in München

GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

In der Zeit vom 20. bis 24. April 1954 fand in München die diesjährige wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) statt, unter der örtlichen Tagungsleitung von Prof. Dr. J. Heinhold (Lehrstuhl f. Angew. Math. TH München). Sie wurde von etwa 280 gemeldeten Tagungsteilnehmern, davon 40 aus der Ostzone und 40 aus dem Ausland, sowie von einer größeren Zahl von Gästen aus Industrie und Wirtschaft besucht. Im Mittelpunkt der Tagung standen an den Vormittagen umfassende Übersichtsberichte und deren Diskussionen, ferner die Frage der Ausbildung und Stellenvermittlung von Diplom-Mathematikern.

Die Nachmittage waren den Fachsitzungen vorbehalten. In den parallel laufenden Sitzungen wurden 68 Fachvorträge über angewandte Mathematik, Mechanik, Strömungslehre, Rechenmaschinen und Statistik gehalten.

Neben den wissenschaftlichen Veranstaltungen fand ein Empfang der Landeshauptstadt München mit einem Frühschoppen im Ratskeller statt, auf dem der Oberbürgermeister Th. Wimmer den Tagungsteilnehmern einen Überblick über Zerstörung und Wiederaufbau der Stadt gab. Der Besuch des Gastspiels „der Geizige“ von Molière gab Gelegenheit, das bayerische Staatsschauspiel kennenzulernen. Der gesellige Abend am 22. 4. vermittelte einen Eindruck von dem echten bayerischen Volkslied und echter Volksmusik. Ein gemeinsamer Ausflug an einem herrlichen Frühlingstage an den Ammer- und Starnbergersee mit einem Besuch des Klosters Andechs, dessen Abt Prof. Dr. Hugo Lang die Teilnehmer empfang, bildete den Abschluß der Tagung.

[Ein ausführlicher Bericht über den Verlauf der Tagung erschien in PHYS. BL. 10, 280, 1954, Heft 6.]

H.

MITTWOCH, DER 21. APRIL 1954

Vormittags

Allgemeine Sitzung

Vorsitz: A. Walther (Darmstadt)

Nach Eröffnung der Tagung durch Prof. Walther begrüßten seine Magnifizenz der Rektor der Technischen Hochschule, Prof. A. Rucker, sowie im Namen der Stadt München der Stadtschulrat Dr. A. Fengale die Tagungsteilnehmer. Danach folgten zwei umfassende Übersichtsberichte.

L. Föppl (TH München): Die Spannungsoptik als Hilfsmittel der Grundlagenforschung.

Die Spannungsoptik hat in den letzten Jahren hauptsächlich durch neue Modellwerkstoffe, die frei von Randeffekten sind, an Bedeutung gewonnen, sodaß man jetzt in der Lage ist, sie als Hilfsmittel zur Grundlagenforschung zu verwenden. Als Beispiel hierzu dienten folgende Untersuchungen:

(1) Elastische Spannungen bei großen Formänderungen; (2) Das Prinzip von St. Venant; (3) Elastische Spannungen in Körpern, die aus geschichteten Platten bestehen (z. B. Gebirge); (4) Der Übergang von der Haftreibung zur gleitenden Reibung.

Ferner wurde ein spannungsoptischer Versuch an einem Modell aus dem Gießharz Araldit besprochen und teilweise gezeigt.

H. E. Dickmann (TH Karlsruhe): Strömungsmaschinen.

Vorsitz: J. Heinhold (München)

F. Schultz-Grunow (Lehrstuhl f. Mechanik, TH Aachen): Überblick über Probleme und Fortschritte auf dem Gebiet der Rheologie.

Es wurde im wesentlichen über die Internationale Rheologen-Tagung in Oxford vom 26. bis 31. 7. 1953 über das Marburger Relaxationskolloquium (2. bis 4. 10. 1953) und die gemeinsam mit dem Verein Deutscher Ingenieure von der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik abgehaltene Fachausschußsitzung über Rheologie (Marburg, 4. bis 6. 3. 1954) berichtet.

Insbesondere werden die phänomenologischen Fließformeln, die heute noch fast ausschließlich zur Deutung von Versuchsergebnissen verwandt werden, und die aus Vorstellungen über das molekulare Geschehen hergeleiteten Fließformeln besprochen. Mit letzteren wird gezeigt, daß die Viskosimetrie für rheologische Stoffe nicht das geeignete Versuchsverfahren darstellt, weil auf diese Stoffe der Begriff der Zähigkeit nicht anwendbar ist. Die auf der Dimensionsanalyse sich gründende Versuchsmethode und die hiermit sich ergebenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten werden vorgeführt.

Zu den theoretischen Bestrebungen, Beziehungen zwischen Spannungs- und Verformungstensor aufzustellen, wird auf Widersprüche in den Annahmen, in den Transformationen, in der physikalischen Bedeutung, sowie auf die Notwendigkeit, große Verformungen zu betrachten, hingewiesen.

[Der Vortrag wird in der Z. ANGEW. MATH. MECH. veröffentlicht.]

Nachmittags

Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: A. Willers (Dresden)

W. Quade (Hannover): Zur Interpolationstheorie der reellen Funktionen.

Die Lagrange'sche und damit auch die Newton'sche Interpolationsformel weist zwei Defekte auf, die den Wert dieser Formeln beeinträchtigen. Zum einen strebt der Lagrange'sche Interpolationsausdruck bei

zunehmender Ordinatenzahl im allgemeinen nicht gegen die zu interpolierende Funktion, zum andern bewirkt eine geringe Änderung einer der gegebenen Ordinaten eine unverhältnismäßig große Änderung der zwischen den gegebenen liegenden Ordinaten.

Es wird ein Interpolationsverfahren vorgeschlagen, das von den beiden oben erwähnten Mängeln frei ist. Das Verfahren benutzt Ausdrücke, die sich additiv aus einem Polynom und einem endlichen trigonometrischen Ausdruck zusammensetzen. Es werden Fehlerabschätzungen angegeben, die erkennen lassen, in welcher Weise der Interpolationsausdruck gegen die zu interpolierende Funktion strebt.

K. H. Bachmann (Dresden): Der Konvergenzgrad bei iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation.

Die Abnahme des Fehlers bei iterativer Anwendung der inversen Interpolation wird untersucht. Verwendet man als Interpolationsfunktion ein Polynom, so sind die Fehler der erhaltenen Näherungen dem Produkt von Potenzen der Ausgangsfehler proportional. Das Wachstum der Exponenten dieser Potenzen ist maßgebend für die Schnelligkeit der Konvergenz. Der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Exponenten konvergiert gegen eine Zahl, die man nach Bodewig (ZAMM 29) als Konvergenzgrad bezeichnet. Er ergibt sich als größte Wurzel der charakteristischen Gleichung einer Differenzgleichung, welche die betreffenden Exponenten rekursiv zu berechnen gestattet.

Fr. Wecken (Haltingen): Über die glatte Ausgleichung von Wertefolgen.

Die Zahlen x_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) seien gegeben als Näherungswerte bei $f = \nu$ für eine Funktion $f(t)$ mit stetiger $(k-1)$ ter und stückweise stetiger k -ter Ableitung. Wir verwenden

$$A(g) = \sum_{\nu=1}^n |g(\nu) - x_\nu|^2 \text{ und } B(g) = \int_1^n |g^{(k)}(t)|^2 dt$$

als Maß für die Anpassung von $g(t)$ an die x_ν bzw. für die Glätte von $g(t)$.

Bei gegebenem $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \mathbf{x}$, $k > 0$ und $\lambda > 0$ führt

$$A(g) + \lambda B(g) = \text{Min.}$$

auf die Ausgleichsfunktion $g(t) = f(t)$, und es ist

$$f^{(2k)}(t) = 0 \quad \text{für } \nu < t < \nu + 1 \quad (0 < \nu < n).$$

Für die k Vektoren

$$\{f^{(s)}(\nu)\}_{(1 \leq \nu \leq n)} = f^{(s)}$$

gilt

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{x} = (\mathbf{E} + \lambda \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x}, \quad \mathbf{f}^{(s)} = \mathbf{D}_s \mathbf{f};$$

die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{D}_s vom Grade n hängen von k ab. Aus den $n \cdot k$ Werten $f^{(s)}(\nu)$ ergibt sich $f(t)$ eindeutig als Polynom-Interpolation. Die Grenzfälle $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$ liefern eine reine Interpolation bzw. eine Ausgleichsparabel.

Auf unendliche Folgen \mathbf{x} , die eine beschränkte Differenzenfolge endlicher Ordnung besitzen, ist das Verfahren übertragbar. Dabei sind \mathbf{M} und \mathbf{D}_s rationale Funktionen von Q , wo

$$Q\{x_\nu\} = \{x_{\nu+1}\}.$$

G ist eine Glättungsformel nach Schoenberg [QUART. APPL. MATH. 4, 45—99, 112—141, 1946]; die Zuordnung $x \rightarrow f(t)$ ist für $\lambda > 0$ eine glättende Interpolationsformel, exakt für Polynome vom Grade $2k-1$. Für harmonische Schwingungen

$$y_u = \{\exp(i\nu u)\} (-\infty < \nu < \infty)$$

mit der Kreisfrequenz $|u|$ ($-\pi < u \leq \pi$) ist

$$Gy_u = \gamma(u) \cdot y_u;$$

G hat die Wirkung eines phasentreuen Übertragungsgliedes mit dem Dämpfungsfaktor $\gamma(u)$. Bei nicht zu kleinem k verhält sich G wie ein Tiefpaß.

Die Betrachtung von Linearkombinationen endlich vieler y_u legt eine spezielle Wahl von λ durch die Forderung

$$\sqrt{A(g)/A_\infty} + \sqrt{B(g)/B_0} = \text{Min.}$$

nahe. Dabei sind jetzt $A(g)$ und $B(g)$ durch Mittelbildungen erklärt.

Vorsitz: W. Quade (Hannover)

L. Occhini (TH Sao Paulo): Determinazione delle zeri di un polinomio a coefficienti reali.

Si tratta di un metodo per la determinazione delle radici di un polinomio dato — prima le parti reali e poi le parti immaginarie —.

Per trovare le parti reali, si fanno interpolazioni o sopra i valori numerici del polinomio dato (caso delle radici reali semplici) oppure sopra valori numerici di un altro polinomio, ottenuto in corrispondenza al polinomio dato e che si chiama Polinomio delle Semi-somme (caso delle radici complesse o multiple).

Le parti immaginarie si determinano coll'aiuto dell'algoritmo di Euclide.

F. L. Bauer (Math. Inst. TH München): Quadratische Konvergenz der Bernoulli'schen Methode.

Das Bernoulli'sche Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung von Polynomen einschließlich der Jacobi-Aitken'schen Erweiterung für konjugiert-komplexe Paare ist nur linear konvergent. Es läuft bekanntlich auf die Iteration eines Vektors mit der zum Polynom gehörigen Frobenius'schen Matrix hinaus. Zunächst wird gezeigt, daß die Iteration mit der Transponierten (sie hängt mit der Lagrange'schen Variante zusammen) Vorteile hat. Sie erlaubt insbesondere ein quadratisch konvergentes Fortschreiten der Iteration. Auch das derart abgekürzte Verfahren ist gegen Rundungsfehler selbstkorrigierend. Außerdem ist es wegen der Einfachheit des Iterationsprozesses und der Möglichkeit laufender Verprobung zur Durchführung mit programmgesteuerten Rechanlagen brauchbar, und zwar auch für Polynome mit komplexen Koeffizienten. Ferner führt die Iteration nicht nur auf die absolut größte(n) Nullstelle(n), sondern auch direkt auf das Polynom, von dem diese Nullstelle(n) abgetrennt ist (sind). Dabei ist im Falle von Nullstellen gleichen Betrages insbesondere konjugiert-komplexer Paare, nur ein einfacher Prozeß, der formal der „cross-division“ von Routh entspricht, solange durchzuführen, bis Konvergenz eintritt.

S. Falk (Inst. f. Techn. Mech. TH Braunschweig): Neue Verfahren zur direkten Lösung des allgemeinen Matrizeigenwertproblems.

Die Umwandlung des allgemeinen Matrizeigenwertproblems

$$\mathbf{Ax} = k\mathbf{Bx}$$

der Ordnung n in das spezielle Problem

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = kx$$

erfordert rund $\frac{4}{3}n^3$ Multiplikationen, die anschließende Transformation von Hessenberg etwa n^3 Multiplikationen, so daß zur Aufstellung des charakteristischen Polynomes

$$\varphi(k) = |\mathbf{A} - k\mathbf{B}|$$

etwa $\frac{7}{3}n^3$ Multiplikationen erforderlich sind. Es werden zwei Verfahren entwickelt, die nur $\frac{6}{3}n^3$ Multiplikationen benötigen und sich stark schematisieren lassen. Voraussetzungen werden nicht gemacht; \mathbf{A} und \mathbf{B} dürfen beide singular sein.

Verfahren 1: Verallgemeinerung der Methode von Hessenberg. Die gegebene Matrix \mathbf{B} wird durch Zeilenkombination in eine untere Dreiecksmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ übergeführt, dabei geht \mathbf{A} in $\tilde{\mathbf{A}}$ über. $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{B}}$ lassen sich nun in einem geschlossenen Rechengang in \mathbf{H} (Hessenberg-Matrix) und \mathbf{E} (Einheitsmatrix) transformieren.

$$\varphi^*(k) = |\mathbf{H} - k\mathbf{E}|$$

ist dann leicht zu ermitteln, ebenso der Eigenvektor x_r bei berechnetem Eigenwert k_r .

Verfahren 2: Es wird nicht \mathbf{A} und \mathbf{B} je für sich, sondern die Polynommatrix

$$\mathbf{P}(k) = -k\mathbf{B} + \mathbf{A}$$

insgesamt transformiert, wobei lediglich Zeilen, nicht Spalten, von $\mathbf{P}(k)$ zu kombinieren sind. Mit Hilfe des Begriffes der einer beliebigen Polynommatrix zugeordneten „Koeffizientenmatrix“ lassen sich die von den Matrizen mit konstanten Elementen geläufigen Rechenverfahren auf Polynommatrizen übertragen. Zum Schluß bleibt im wesentlichen eine zweireihige Matrix übrig, deren Elemente Polynome in k sind, und zwar im allgemeinen vom Grade $n/2$ bei geradem n und vom Grade $(n+1)/2$ bzw. $(n-1)/2$ bei ungeradem n . Auch Probleme der Art

$$(k^2\mathbf{A} + k\mathbf{B} + \mathbf{C})x = 0; (\lambda\mathbf{A} + k\mathbf{B} + \mathbf{C})x = 0$$

usw. lassen sich ohne weiteres behandeln. Sämtliche Eigenvektoren sind bei berechnetem Eigenwert unabhängig voneinander leicht zu gewinnen.

[Hauptveröffentlichung mit mehreren Zahlenbeispielen: „Abhandl. d. Braunschweig. Wiss. Ges., Band VI, 1954“, Vieweg, Braunschweig 1954. Dort ist das Verfahren 1 mit II, Verfahren 2 mit III bezeichnet.]

W. Jenne (Frankfurt a.M.): Die Punktdarstellung einer Matrix nach Konrad Friedrich; Anwendungen und Methodisches.

Abbildung einer beliebigen Matrix in der Zeichenebene: Elemente der Hauptdiagonalen den bezifferten Punkten der Ebene zugeordnet, gemischte Elemente ebenfalls bezifferten Kurvenstücken zugeordnet, die bei beliebigem Verlauf und mit beliebiger Krümmung das zugehörige Punktpaar verbinden. Verschwindende Elemente: Kein Abbild. Unsymmetrische Matrizen oder Determinanten: Doppelbezifferung der Kurvenstücke, je nach dem Durchlaufungssinn. Nichtquadratische Matrizen: freiliegende Kurven-

stücke. Symmetrische Matrizen oder Determinanten: Durchlaufungssinn kann unberücksichtigt bleiben. Konstanter Wert aller von Null verschiedenen gemischten Elemente: Ersparnis der Kurvenbezeichnung (häufiger Fall auf versch. Gebieten). Elemente der Hauptdiagonale haben einen festen Wert: Ersparnis der Punktbezeichnung, daher nun rein geometrische Abbildung, frei von jeder Metrik, an kein Koordinatensystem gebunden, Krümmung der Kurvenstücke gleichgültig, entscheidend sind nur Lagebeziehungen und Symmetrieeigenschaften der Abbildungsfiguren. Anhand der bisherigen Erfolge werden die großen Zukunftsmöglichkeiten angedeutet. Zum Beiziehern der Abbildungselemente können auch Matrizen, Tensoren, Gebilde der logistischen Mathematik und dergl. verwendet werden.

[Hauptveröffentlichung: ASTRON. NACHR. 278, 74—95, 1949.]

Fachsitzung B: Mechanik

Vorsitz: R. Grammel (Stuttgart)

N. Forbat (Mons): Vibrations de Fléxion d'un Arbre Cylin-
drique en Rotation Rapide.

Nous considérons un arbre cylindrique homogène animé d'une rotation uniforme très rapide autour de son axe et nous proposons de déterminer les fréquences propres des vibrations de flexion en tenant compte que chaque tronçon élémentaire est soumis, à cause de la rotation, à un couple gyroscopique non négligeable dans le cas où de nombreux volants identiques sont calés à intervalles égaux sur l'arbre. Alors que Stodola ne détermine ces fréquences propres, à partir, des équations aux dérivées partielles du mouvement, que dans le cas de deux rotules aux extrémités de l'arbre, nous indiquons une méthode de détermination de ces fréquences propres pour des conditions aux limites variées. La forme symétrique des équations du mouvement permet de simplifier l'étude et d'apercevoir les raisons pour lesquelles le cas de Stodola conduit à des vibrations circulaires.

E. Pestel (TH Hannover): Eine Verallgemeinerung des
Holzer-Verfahrens zur Schwingungsberechnung von
Stabwerken.

Das bekannte Holzer-Verfahren für die Berechnung von Torsionsschwingungen von Stäben mit diskreter Massenbelegung wird auf allgemeine Schwingungen von Stabwerken erweitert. Dabei erweist sich die Anwendung des Matrizenkalküls als zweckmäßig. Es werden zwei verschiedene Formen des Verfahrens vorgeführt, die eine weitgehende Schematisierung und Kontrolle der Zahlenrechnung gestatten. Die Methode eignet sich auch für die Berechnung erzwungener gedämpfter Schwingungen.

K. Magnus (z. Zt. Frankfurt/Main): Die Stabilität des kräfte-
freien, unsymmetrischen Kreisel in kardanischer La-
gerung.

Bei den meisten in der Technik verwendeten Kreiseln sowie auch bei zahlreichen Lehrmodellen wird der Kreiselrotor in einer aus zwei Ringen (oder Halbringen) bestehenden kardanischen Aufhängung gelagert. Der Trägheitseinfluß der Aufhängung ist für den symmetrischen Kreisel recht gut bekannt; nunmehr soll er auch für den unsymmetrischen, aber kräftefreien Kreisel untersucht werden, insbesondere im Hinblick auf die sich dabei ergebenden Stabilitätsverhältnisse. Die Untersuchungen zeigen, daß nicht nur die Trägheitsmomente der Kardanringe, sondern auch ihre rela-

tive Lage — d. h. die Schräglage des inneren Kardanringes gegenüber der Ebene des äußeren Kardanringes — von Einfluß sind. Am interessantesten erweist sich dabei der Fall eines im erweiterten Sinne „abgeplatteten“ Kreisels, bei dem Instabilität in einem gewissen Bereich von Schräglagen des inneren Kardanringes herrscht, während das System bei kleineren oder größeren Schräglagen wieder stabil bleibt. Der „verlängerte“ Kreisel ist dagegen in jedem Falle stabil. Der dazwischen liegende Fall eines Kreisels, bei dem in der Normallage das Rotorträgheitsmoment zwischen den beiden anderen Hauptträgheitsmomenten des Gesamtsystems liegt, ergibt Instabilität von der Normallage bis zu einem bestimmten Grenzwinkel der Schrägneigung. Bei stärkeren Schrägneigungen ist das System wieder stabil.

Eine Theorie dieser Effekte läßt sich auf den Euler-Gleichungen für die Bewegung starrer Körper aufbauen. Begnügt man sich bei der Behandlung der Stabilität mit der Untersuchung von Nachbarbewegungen zu stationären Bewegungen, so kommt man zu linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Das Aufsuchen ihrer periodischen Lösungen führt schließlich auf die gesuchten Stabilitätsbedingungen.

Vorsitz: F. Schultz-Grunow (Aachen)

E. Pestel (TH Hannover): Ein neues Strömungsgleichnis der Torsion.

Im Gegensatz zum bekannten Strömungsgleichnis von Thomson handelt es sich hier um eine Analogie zwischen dem Verhalten einer viskosen Flüssigkeit und dem eines auf Torsion beanspruchten zylindrischen Stabes. Auf einer unendlich großen Ebene sei eine Scheibe vom Umriß des Stabquerschnittes parallel derart gelagert, daß zwischen den Ebenen ein dünner Spalt besteht. Sobald die Ebenen in Richtung ihrer Normalen relativ zueinander mit von Null verschiedener Geschwindigkeit bewegt werden, setzt eine Flüssigkeitsbewegung ein, die im wesentlichen den Ebenen parallel verläuft. Dieser Vorgang ruft einen der Spaltdickenänderung entgegengesetzten Widerstand hervor, der unter der Voraussetzung schleichender Strömung proportional dem Drillwiderstand eines zylindrischen Stabes von entsprechendem Querschnitt ist. Der Druckgradient in der strömenden Flüssigkeit ergibt sich als Maß für die Schubbeanspruchung des Stabes.

G. Heinrich und **K. Desoyer** (TH Wien): Ein neues graphisches Verfahren zur Schwungradermittlung bei Kolbenmaschinen. (Vorgetr. von K. Desoyer)

Für die Ermittlung des Schwungrades eines Aggregates Kolbenkraftmaschine - Arbeitsmaschine, bei dessen stationärem Lauf ein bestimmter Ungleichförmigkeitsgrad nicht überschritten werden darf, wurde ein neues, im wesentlichen graphisches Verfahren entwickelt. Obwohl die genauen Getriebefunktionen beider Maschinen berücksichtigt werden, kann der Zeichenaufwand sehr niedrig gehalten werden. Dies gelingt dadurch, daß auf einfache Art die Lagen des Systems, die den Extremwerten der Winkelgeschwindigkeit entsprechen, gefunden werden, wobei man die Getriebefunktionen nur in zwei kleinen Intervallen in der Nähe der Lagen, die den Extremwerten der kinetischen Energie des Systems entsprechen, zu kennen braucht. Bei der vorliegenden Methode ist nur eine vereinfachende Annahme notwendig, die aber die Genauigkeit der Ergebnisse praktisch kaum beeinflußt. Für höchste Ansprüche an Genauigkeit können die erzielten Ergebnisse kontrolliert und durch eine Iteration bis zu beliebiger Genauigkeit verbessert werden. Das Verfahren ist auch für den Fall verwendbar, daß die zusätzlichen Schwungmassen gegeben sind und der zu erwartende Ungleichförmigkeitsgrad ermittelt werden soll. Die praktische Durchfüh-

rung des neuen Verfahrens wurde an Hand eines Beispielles ausführlich erläutert [Vgl. MASCHINENBAU UND WÄRMEWIRTSCHAFT, 8, 241—247, 1953, Heft 9]. Neben dem vorliegenden graphischen Verfahren wurde auch eine rein rechnerische Methode entwickelt [K. Desoyer und A. Slibar, Die rechnerische Ermittlung des Ungleichförmigkeitsgrades bei Kolbenmaschinen, ÖSTERR. ING. ARCH. 7, 100—110, 1953].

A. Slibar und K. Desoyer (TH Wien): Optimale Schwingungstilgung durch Fliehkraftpendel. (Vorgetr. von A. Slibar)

Wird ein an einer rotierenden Masse angelenkter Pendel-Schwingungstilger unter Einbeziehung großer Pendelausschläge als mathematisches Pendel untersucht, so ergibt sich neben der aus der linearisierten Rechnung bekannten ersten Abstimmbedingung eine Aussage über die zur Erzielung geringster Winkelgeschwindigkeitsschwankung des Grundsystems anzubringende günstigste Pendelmasse [Vgl. ING. ARCH. 21, 208, 1953].

Die im Motorenbau ausgeführten Tilgerformen legen eine Behandlung als physikalische Pendel nahe. Gegenüber der Behandlung als mathematisches Pendel tritt bei dieser Art der Betrachtung als weiterer Parameter der Trägheitsradius des Pendelkörpers um seinen Schwerpunkt hinzu. Dadurch ergibt sich wesentlich größere Freizügigkeit, im Rahmen konstruktiver Möglichkeiten optimale Schwingungstilgung zu erzielen. Die nicht-linearisierte Rechnung erweist, daß wie bei der Behandlung als mathematisches Pendel auch in diesem Fall bei ungünstiger Kombination der Parameter unerwünschte Resonanzen auftreten. Die verbleibende Winkelgeschwindigkeitsschwankung der Hauptmasse läßt sich als Funktion zweier dimensionsloser Parameter zeichnerisch darstellen [Vgl. ING. ARCH. 22, 36, 1954].

In einer weiteren Arbeit werden die Verdrehungen einer elastischen Welle untersucht, die zwei mit Pendeltilgern ausgestattete rotierende Massen verbindet. Die Tilger werden als physikalische Pendel aufgefaßt, die Welle als elastisches Kontinuum eingeführt [Vgl. ÖSTERR. ING. ARCH. 7, 309, 1953].

W. Hahn (Math. Inst. TH Braunschweig): Zur Stabilität von Reglern mit Nachlaufzeit.

Es sei die Bewegung eines Regelsystems mit Nachlaufzeit durch eine lineare Differential-Differenzengleichung (DDgl) beschrieben. Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität des Systems wird in der technischen Literatur allgemein angesehen, daß die Wurzeln der sogenannten charakteristischen Gleichung ausschließlich negative Realteile haben, was man z. B. mit dem Nyquist-Kriterium feststellen kann. Eine exakte mathematische Begründung hierfür ist indessen bisher noch nicht gegeben worden. Zum Beweis muß man zeigen, daß sich jede Lösung der DDgl als eine unendliche Reihe darstellen läßt, die nach gewissen Partiallösungen von Exponentialform fortschreitet und die auf der ganzen positiven Zeitachse gleichmäßig konvergiert. Der Nachweis läßt sich für solche DDgl erbringen, in denen die höchste auftretende Ableitung nicht mit Verzögerungsgliedern behaftet ist.

St. Schottlaender (Math. Inst. Univ. Würzburg): Über automatisch gesteuerte Bewegungen.

Im Anschluß an W. H. Phillips (NACA, TN 3034, 1953) wird eine analytische Methode aufgezeigt um eindimensionale unstetig gesteuerte Bewegungen mit Laufgeschwindigkeitszuordnung zu untersuchen, insbesondere auch „gemischte“ Steuerungen, die in Nähe der Nullage stetig, nach Erreichung von „Sättigungsgrenzen“ jedoch unstetig arbeiten. Für Bewegungen dieser Art kann es keinen geschlossenen analytischen Ausdruck (in

Großen) geben, mit Ausnahme der periodischen Bewegungen. Diese lassen sich durch Aufstellung eines einfachen linearen Gleichungssystems vollständig berechnen und von ihnen ausgehend können dann auch Aussagen über allgemeine Bewegungen gemacht werden, insbesondere die für die Technik so wichtigen Stabilitätsaussagen. Unstetige bzw. „gemischte“ Steuerungen haben den Vorteil apparativer Einfachheit, größerer Robustheit und geringerer Herstellungskosten. Sie können aber auch ihrerseits unerwünschte Erscheinungen hervorrufen, wenn man die Steuerparameter unzweckmäßig wählt. Eine Betrachtung der Ebene der Steuerparameter führt daher zu wichtigen Hinweisen für die Wahl der Steuergrößen. [Hier sei auf die demnächst erscheinende Arbeit im ARCH. MATH. 5 verwiesen.] Die Untersuchungen werden noch fortgeführt und insbesondere auf mehrdimensionale Bewegungen ausgedehnt.

Fachsitzung C: Strömungslehre

Vorsitz: A. Betz (Göttingen)

Ad. Oudart (Centre d'Etudes Supérieures de Mécanique, Paris): Stromlinien an der Wand eines unendlichen, schiebenden Flügels.

Man zeigt für eine inkompressible zähe oder ideale Flüssigkeit, daß die „Stromlinien an der Wand“ praktisch die äußeren Stromlinien verlängern, welche an die „Staulinie“ angrenzen. Diese Stromlinien berühren praktisch diese Scheidungslinie und die Ablösungslinie. (Theoretisch verlaufen sie asymptotisch.)

W. Wuest (MPI f. Strömungsforschung, Göttingen): Asymptotische Absaugegrenzschichten an längs angeströmten zylindrischen Körpern.

Als Verallgemeinerung der Absaugegrenzschicht an einer unendlich ausgedehnten ebenen Wand mit gleichmäßig verteilter Absaugung ergeben sich Grenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern, bei denen die drei Geschwindigkeitskomponenten nicht von der x -Koordinate in Hauptströmungsrichtung abhängen. Die Absaugegeschwindigkeit muß dabei so verteilt sein, daß die Wirbelkomponente in x -Richtung verschwindet. Geschlossene analytische Lösungen werden für den ruhenden und rotierenden Kreiszylinder, den elliptischen Zylinder und die Keilströmung abgeleitet. Bei im endlichen geschlossenen zylindrischen Körpern (z. B. Kreiszylinder oder elliptischer Zylinder) muß das Umlaufintegral der Absaugegeschwindigkeit größer als $4\pi\nu$ sein, wenn die Verdrängungsdicke endlich sein soll. Weitere Lösungsgruppen können nach dem Verhalten der x -Komponente des Wirbelvektors unterschieden werden. Ist die Komponente in Hauptströmungsrichtung konstant, so findet man Strömungen, bei denen die Flüssigkeit im Unendlichen wie ein starrer Körper rotiert. Weitere spezielle Lösungen ergeben sich durch Überlagerung der axialen Hauptströmung mit Hamel'schen spiralförmigen Strömungen.

E. Eujen (Braunschweig): Bemerkungen zur Durchflußmessung mit Drosselmeßgeräten bei kleinen Re -Zahlen. Die Technik hat sich erfolgreich bemüht, Bauformen von Drosselmeßgeräten zu entwickeln, die konstante Durchflußzahlen bei kleinen Reynold'schen Zahlen aufweisen und für eine Normung geeignet sind. Beim Übergang von der turbulenten zur laminaren Strömungsform ergeben sich für die Praxis der Durchflußmessung einige neue Gesichtspunkte. Insbesondere muß die Tatsache beachtet werden, daß die laminare Strömung

zur vollen Ausbildung ihrer Geschwindigkeitsverteilung eine wesentlich größere Anlaufstrecke benötigt als die turbulente Strömung. Mit Hilfe eines einfachen Näherungsansatzes über die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung in der Anlaufstrecke wird eine numerische Abschätzung über den Einfluß der Einlaufstreckenlänge auf die Anzeige eines Drosselmeßgerätes vorgenommen.

W. Szablewski (DADW-Forschungsinst. f. Math. Berlin): Das Wandgesetz turbulenter Grenzschriftströmungen mit Druckanstieg.

Die theoretische Behandlung turbulenter Grenzschriftströmungen mit mittlerem und starkem Druckanstieg erfordert die Berücksichtigung des Einflusses des Druckgradienten bis zur Wand hin. Unter Zugrundelegung des Prandtl'schen Schubspannungsansatzes wird als Verallgemeinerung des logarithmischen Geschwindigkeitsgesetzes ein Wandgesetz abgeleitet, das diesem Einfluß in Wandnähe Rechnung trägt. Die empirischen Koeffizienten des Wandgesetzes sind die beiden empirischen Koeffizienten des logarithmischen Gesetzes und vom Druckgradienten der Strömung unabhängig. Das Wandgesetz kann unter Umständen dazu dienen, die Wand-schubspannung aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe zu bestimmen.

[Die Arbeit wird im ING.ARCH. 1954 erscheinen.]

Vorsitz: H. Schlichting (Braunschweig)

E. Eichelbrenner (Paris): Eine Verallgemeinerung der Theorie der schlanken Körper.

R. T. Jones hat den Auftrieb von schlanken Flügeln durch das Studium ihrer inkompressiblen Umströmung in einer beliebigen Querebene berechnet. Die Lösung unterliegt zwei Beschränkungen: (1) Der Einfluß von Form und Dicke der Flügelprofile wird nicht berücksichtigt; (2) Die von der Hinterkante ausgehende Wirbelschleppel darf die Potentialverteilung am Flügel nicht beeinflussen.

Die erste Beschränkung wurde im Überschall von Ward, im Unterschall von Adams und Sears behoben. Doch setzen die Lösungen nach wie vor die Jones'sche Lösung als Basis voraus. Die zweite Beschränkung beseitigte R. Legendre. Seine Lösung, die den Einfluß der Wirbelschleppel in allen Fällen zu berücksichtigen erlaubt, gestattet jedoch nicht die Behandlung dicker oder verwundener Flügel.

In der vorliegenden Mitteilung wird eine gleichzeitige Verallgemeinerung der Lösungen von Legendre einerseits und von Ward sowie von Adams und Sears andererseits angegeben, die auch bei Flügeln mit rückwärts gepfeilter Hinterkante den Fall dicker und gekrümmter Profile zu behandeln erlaubt.

O. Emersleben (Univ. Greifswald und Abt. Angew. Math. d. Dt. Akad. d. Wiss. Berlin): Über eine doppeltperiodische Parallelströmung zäher Flüssigkeiten.

Bereits in einer Veröffentlichung über das Darcy'sche Filtergesetz [PHYS. Z. 26, 601—610, 1925] hat der Vortragende eine spezielle doppeltperiodische Parallelströmung zäher Flüssigkeiten behandelt. Dies geschah mittels Epstein'scher Zetafunktionen, wie sie z. B. bei Kristallgitterenergieberechnungen auftreten [Z. PHYS. 127, 588—609, 1950], nämlich

$$Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} (2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(kx + ly)}{k^2 + l^2}$$

bedingt konvergent, nach wachsendem Nenner summiert), für die

$$\Delta Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} = 4\pi^2$$

st. Die Anwendungen dieser Arbeit insbesondere in den letzten Jahren [Vgl. WISS. ANN. 3, 138—147 und 242—253, März und April 1954] gaben Anlaß zu Verallgemeinerungen der früheren Lösung, die ebenfalls exakte Lösungen der hydrodynamischen Grundgleichungen sind. Die Verallgemeinerungen ergeben sich durch Superposition der ursprünglichen Lösungen, indem man diese gegeneinander parallel zur Strömungsrichtung verschiebt (siehe z.B. WISS. ANN. a. a. O., Fig. 8a und b). Für die praktische Durchführung ist eine genauere numerische Berechnung der benutzten Funktion

$Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}$ (2) zweckmäßig. Mit Hilfe von Funktionalgleichungen zwischen diesen Funktionen, u. a. vom Typ

$$Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ nx & ny \end{vmatrix} (2) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x + \mu/n & y + \nu/n \end{vmatrix} (2)$$

erhält man lineare Beziehungen zwischen verschiedenen Werten der Funktion $Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}$ (2), die zur verbesserten numerischen Berechnung dienen können, insbesondere um den Wert der Funktion in einem Punkt des Periodizitäts- und Symmetrie-Grunddreiecks $0 \leq x \leq y \leq 1/2$ auf den Wert in einem anderen Punkt desselben Grunddreiecks zurückführen zu können. [Ausf. Veröffentl. erscheint in der Z. ANGEW. MATH. MECH., voraussichtlich Aug.—Sept.-Heft 1954.]

W. Bader (Berlin): Die Düsenströmung in vereinfachter Betrachtung.

Um den Einfluß der Wandreibung auf den Durchsatz eines in einer Düse expandierenden Gases in erster Näherung zu erfassen, wird die Strömung als stationäre Fadenströmung aufgefaßt und angenommen, daß die durch Reibung erzeugte Energie dem Gase unmittelbar verlustlos als Wärme zugeführt wird. Anhand der entsprechenden Differentialgleichung lassen sich für den thermodynamischen Zustand (Temperatur und Entropie) im engsten Düsenquerschnitt Näherungswerte angeben, wenn die für den isentropen Durchsatz charakteristische Temperaturfunktion durch eine Ellipse ersetzt wird. Der übliche Reibungsbeiwert kann mittels der sog. halbempirischen Methoden der Grenzschichttheorie für die inkompressible Grenzschicht (Buri, Walz, Truckenbrodt) abgeschätzt werden.

W. Haack und J. Zierep (TU Berlin): Berechnungsmethoden von Laval-Düsen auf Grund eines Formelsystems für die Strömung in der Düsenkehle. (Vorgetr. von J. Zierep.)

w, ϑ seien die Polarkoordinaten des Geschwindigkeitsvektors einer Gasströmung durch eine Laval-Düse, deren Meridian $f(x)$ ist. In der Umgebung der Düsenkehle, wo der Übergang von Unter- zu Überschallgeschwindigkeit erfolgt, werden w, ϑ durch Reihen nach Potenzen von $x, r/f$ dargestellt. Die so gewonnenen Formeln dienen als Ausgang für das Charakteristikenverfahren im Überschallgebiet. Als Anwendung wird die Methode zur Berechnung einer rotationssymmetrischen Parallelstrahldüse und einer Kegeldüse mit idealer Quellströmung und schließlich eines ebenen Krümmers ausführlich erläutert; dabei kann stets erreicht werden, daß die Beschleunigung stetig ist.

Vormittags

Allgemeine Sitzung

Vorsitz: A. Walther (Darmstadt)

E. Stiefel (Inst. f. Angew. Math. d. ETH Zürich): Lineare Gleichungen mit vielen Unbekannten unter Berücksichtigung des Einsatzes von Rechenautomaten.

Die maschinelle Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = k \quad \dots (1)$$

geschieht am besten nach einer der Iterationsmethoden. Ausgehend von einem Näherungsvektor x_0 wird also eine Folge von weiteren Näherungen $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ berechnet, die entweder gegen die Lösung von (1) konvergiert oder dann diese nach endlich vielen Iterationsschritten exakt liefert. Man hat dann den Vorteil des konstanten, für alle Iterationsschritte verwendbaren Rechenprogramms, was ja beim Einsatz von Automaten ausschlaggebend ist. Weitere Wünsche sind, daß dieses Programm einfach sei und daß die Annäherung der Iterationsfolge an die Lösung monoton sei, sodaß mit dem Fortschreiten der Rechnung — und nicht erst zuletzt — immer bessere Information über die Lösung entsteht. Ersetzt man das Auflösen von (1) durch die äquivalente Aufgabe der Minimierung einer quadratischen Funktion und sorgt man dafür, daß diese Funktion bei jedem Iterationsschritt wirklich abnimmt, so gelangt man zu den Methoden der Relaxationsrechnung; diese bieten wie jede Extremalmethode den Vorteil der von vornherein gesicherten Stabilität des Rechengangs.

Eine Iterationsmethode heiße n -ter Ordnung, wenn zur Berechnung von x_{i+1} die n vorhergehenden Näherungen $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n+1}$ herangezogen werden; sie heiße maximaler Ordnung, wenn alle vorhergehenden Näherungen benutzt werden. Am besten untersucht sind die Iterationen erster Ordnung, die in allgemeiner Form die folgende Vorschrift für die Berechnung der Korrektur $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ergeben:

$$\Delta x_{i+1} = L_i r_i. \quad \dots (2)$$

Dabei sind die L_i wählbare Matrizen und r_i ist der Residuenvektor, der bei Einsetzung von x_i in (1) entsteht:

$$r_i = k - Ax_i. \quad \dots (3)$$

Als Spezialfälle sind zu nennen und wurden im Vortrag diskutiert: Das Einzelschrittverfahren (auch nach Gauß und Seidel benannt), das Gesamtschrittverfahren (Richardson), die oben erwähnten Relaxationsmethoden und speziell Gradientenverfahren (stärkster Abstieg). Die Konvergenz all dieser speziellen Algorithmen ist eingehend erforscht, aber für die Verwendung in programmgesteuerten Maschinen im allgemeinen zu langsam.

Der allgemeine Ansatz für Iterationen zweiter Ordnung liefert die Vorschrift

$$\Delta x_{i+1} = M_i \Delta x_i + L_i r_i \quad \dots (4)$$

Werden die Matrizen M_i, L_i als Skalare m_i, l_i gewählt, so erhält man Algorithmen

$$\Delta x_{i+1} = m_i \Delta x_i + l_i r_i, \quad \dots (5)$$

die einer mathematischen Untersuchung zugänglich sind. Es zeigt sich nämlich, daß zu jedem Algorithmus (5) ein System von orthogonalen Polynomen in einer Variablen λ gehört, dergestalt, daß die m_i, l_i im wesentlichen die Koeffizienten in den bekannten Rekursionsformeln sind, die drei sukzessive Orthogonalpolynome verknüpfen. Umgekehrt ist durch die Wahl eines Systems orthogonaler Polynome ein Iterationsverfahren (5) mit all seinen Konvergenzeigenschaften festgelegt. Bis jetzt sind die Tschebyscheff'schen und hypergeometrischen Polynome praktisch erprobt worden; sie liefern bedeutend bessere Konvergenz als die oben erwähnten Iterationen 1. Ordnung.

Unter den Algorithmen (5) befindet sich einer, der sogar die Lösung von (1) in endlich vielen Schritten liefert (n-Schrittverfahren, Methode der konjugierten Gradienten).

Zum Schluß wurde gezeigt, daß sich der Gauß'sche Algorithmus in die verwendete Klassifikation einordnen läßt. In seiner Wendung als Jordan'sche Elimination kann er als Iteration maximaler Ordnung aufgefaßt werden.

W. Oppelt (Hartmann & Braun A.G., Frankfurt/M.): Überblick über Probleme und Methoden der mathematischen Behandlung von Regelungsvorgängen.

Regelvorgänge lassen sich losgelöst vom Gerätetechnischen an Wirkungsnetzbildern (Blockschaltbildern) darstellen. Sie sind mathematisch durch Differentialgleichungen, Frequenzganggleichungen oder Integralgleichungen zu beschreiben. Als Grundaufgaben im linearen Gebiet ergeben sich: Berechnung des zeitlichen Ablaufs eines Regelvorganges, Bestimmung von Stabilität und günstiger Einstellung, Übergang zwischen den frequenzabhängigen und den zeitabhängigen Darstellungen, Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasenverlauf. Für das Gebiet nichtlinearer Regelvorgänge, zu denen auch unstetige Regelvorgänge und solche mit Reibung gehören, gelten die gleichen Grundaufgaben, wobei jedoch die Ergebnisse amplitudenabhängig werden. Weitere Behandlung betrifft die Synthese des Regelkreises, die Benutzung elektronischer Modellsysteme und den Einfluß eines Störpegels bei den von außen auf den Kreis einwirkenden Größen.

Nachmittags

Fachsitzung A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: G. Hoheisel (Köln)

S. Ödman (Djursholm): Die Orthogonalmethode zur Lösung von halbhomogenen partiellen Randwertaufgaben.

Die Methode zielt auf die Bestimmung einer eingliedrigen Näherungslösung ab. Mit einem Produktansatz von zwei expliziten Funktionen und unter Vernachlässigung des Restgliedes wird die partielle Differentialgleichung des Problems durch eine kontinuierlich veränderliche, gewöhnliche Differentialgleichung entweder der einen oder der anderen der expliziten Funktionen ersetzt. Das Problem, das also vorher in der Lösung einer einzigen Differentialgleichung bestand, ist damit in das Problem der Lösung von drei Differentialgleichungen umgewandelt.

Der Ansatz wird in einer bestimmten, geeigneten Weise mit drei Parametern versehen. Irgend eine bekannte Methode — oder Formel, z.B. die Galerkin'sche Formel — wird sowohl auf beide alternativen, gewöhn-

lichen Differentialgleichungen, als auch auf die partielle Differentialgleichung angewendet. Das Problem kann dann gelöst werden — in vielen Fällen vielleicht erst nach einer Integration —, denn die Anzahl der Gleichungen ist ebenso groß wie die Anzahl der Parameter.

Unter gewissen Umständen kann eine mit dieser Methode ausgerechnete Lösung einem einzigen Minimum entsprechen. Um die Bedingungen dafür zu zeigen, werden drei Minimalforderungen für die Methode aufgestellt. Das Verfahren wird mit demjenigen von Ritz verglichen.

E. Bukovics (TH Wien): Zur Abschätzung des Fehlers beim Runge-Kutta-Verfahren und beim Verfahren von Blaess.

Den beiden genannten Verfahren liegt das Prinzip zugrunde, Näherungswerte für die Lösungsfunktion und deren Ableitungen an äquidistanten Argumentstellen unter Ausnützung von an Zwischenstellen berechneten Grobwerten zu ermitteln. Für die Fehler, die bei Anwendung der direkten Formeln für Differentialgleichungen n -ter Ordnung nach einer beliebigen Anzahl von Schritten auftreten, lassen sich rekursive Abschätzungsformeln der Bauart:

$$|\eta_{m+1}^j| \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{j\nu} |\eta_m^\nu| + J_j \quad (\eta_0^\nu = 0; j = 0, 1, \dots, n-1)$$

angeben (η_m^ν ist der Fehler der ν -ten Ableitung nach m Schritten). Dabei sind die Größen $\gamma_{j\nu}$, die von der Schrittweite h und der Lipschitz-Konstanten K abhängen, für die Fehlerfortpflanzung kennzeichnend, während J_j den Integrationsfehler der ν -ten Ableitung bedeutet. Für das Blaess-Verfahren lassen sich die wichtigsten Bestandteile der $\gamma_{j\nu}$ tabellieren. Diese Tabellen sind angenähert auch für das Runge-Kutta-Verfahren brauchbar. [Ausführliche Angabe der Formeln in MONATSH. MATH. 57, 217—245 und 334—350, 1953, Heft 3 und 4.]

Herrn Albrecht (Inst. f. Angew. Math., Univ. Hamburg) verdankt der Votr. den Hinweis, daß die in der zitierten Arbeit auftretenden Größen M_2, M_3, M_4 nicht nur obere Schranken für die entsprechenden vollständigen Ableitungen der Funktion f , sondern auch für die Größen

$$\frac{1}{j_1^k} \cdot \frac{d^k \hat{f}_{m,i}}{dh^k} \quad (k = 2, 3 \text{ bzw. } 4)$$

— wobei die Funktionen $\hat{f}_{m,i}$ aus f durch Einsetzen der Grobwerte entstehen und $j_1 = 1$ für das Blaess-Verfahren und $j_1 = j_2 = 1/2, j_3 = 1$ für das Runge-Kutta-Verfahren zu setzen ist — sein müssen. Es wird gezeigt, wie solche Schranken ohne Hinzutreten grundsätzlicher Schwierigkeiten bestimmt werden können.

H. Grunsky (Univ. Mainz): Eine Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

A. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \quad \dots (1)$$

In der allgemeinen Formel

$$y(x) = y_0 + y_0' \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - \xi) y''(\xi) d\xi$$

$$y_0 = y(x_0), \quad y_0' = y'(x_0)$$

wird $y''(\xi)$ vermöge (1) durch y' und y ausgedrückt, und die entstandenen Integrale werden durch partielle Integration so umgeformt, daß wieder nur y'' auftritt. Iteration des Prozesses führt auf

$$y(x) = y_0 + y_0' \cdot (x - x_0) - \left[\left(\sum_{i=1}^n B_i' \right) y \right]_{x_0}^x + \left[\left(\sum_{i=1}^n (B_i - A_i) \right) y' \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \{A_n(\xi) - B_n(\xi)\} y''(\xi) d\xi$$

mit

$$A_i' = a_i; B_i'' = b_i; a_i(\xi) = (x - \xi) a(\xi); b_i(\xi) = (x - \xi) b(\xi);$$

$$a_i = (B_{i-1} - A_{i-1}) a; b_i = (B_{i-1} - A_{i-1}) b.$$

Um das Auftreten von $y'(x)$ zu vermeiden, hat man die A_i und B_i so zu normieren, daß für $\xi = x$

$$\sum_{i=1}^n (B_i - A_i) = 0.$$

Die noch bestehende Freiheit der Normierung läßt sich zu günstiger Restabschätzung verwerten. Bei $a(x) \equiv 0$ kann erreicht werden, daß sich B_n wie $1/(2n+1)!$ verhält.

B. Es liege eine hyperbolische Differentialgleichung in der Normalform vor:

$$u_{xy} + a_1(x, y) u_x + b_1(x, y) u_y + c_1(x, y) u = 0. \quad (2)$$

Stellen wir uns beispielsweise das charakteristische Anfangswertproblem: gegeben auf $x = x_0$ und auf $y = y_0$; R sei das Rechteck

$$x_0 \leq \xi \leq x, y_0 \leq \eta \leq y.$$

Dann ist

$$I = \iint_R u_{xy}(\xi, \eta) d\xi d\eta = [u]_R,$$

nämlich gleich der Wechselsumme der u -Werte in den Ecken von R . In (2) wird u_{xy} vermöge (2) ersetzt, worauf partielle Integration (in nicht ganz trivialer Weise) wieder auf ein Integral mit u_{xy} führt, und der Prozeß wird iteriert. In den auftretenden Randintegralen sind die Teile über $\xi = x$ und $\eta = y$ durch passende Normierung der auftretenden Integrale der bekannten Funktionen zu beseitigen. Die dann noch bestehende Freiheit kann wie bei (A) ausgenutzt werden.

[Ausführliche Veröffentlichung voraussichtlich in der MATH. Z.]

H.-K. Dettmar (MPI-Inst. f. Phys., Göttingen): Symmetrisierbare Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen.

Die symmetrisierbaren Eigenwertaufgaben (s. E.A.) bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen sind eine Verallgemeinerung der selbstadjungierten Aufgaben. Die Selbstadjungiertheit wird durch die weniger einschränkende Voraussetzung der „Symmetrisierbarkeit“ ersetzt, welche mit der Existenz eines „Vergleichsoperators“ verknüpft ist.

Die bekannten Verfahren zur genäherten Lösung (Iterationsverfahren, Störz'sches Verfahren u. a.) sowie die bekannten Einschließungssätze las-

sen sich nach gewissen Modifikationen auf die s.E.A. übertragen und näher analysieren. Die Verfahren hängen von dem gewählten Vergleichsoperator ab. Mitunter stehen für die numerische Rechnung verschiedene Vergleichsoperatoren zur Verfügung. Diese Möglichkeit ist auch für die Behandlung selbstadjungierter Probleme fruchtbar.

Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte läßt sich für die „volldefiniten“ ordentlich s.E.A.“ nachweisen. Entwicklungssätze können ausgesprochen werden.

Vorsitz: A. Walther (Darmstadt)

E. Trefftz (MPI-Inst. f. Phys., Göttingen): Bestimmung der Eigenwerte einer elliptischen Differentialgleichung mit der Randbedingung der Periodizität (Schrödinger-Gleichung in Metallen).

Die Schrödinger-Gleichung eines Elektrons im Metall lautet

$$-\frac{1}{2} \Delta \Psi + V(\mathbf{r}) = E \Psi,$$

wobei $V(\mathbf{r})$ (das Potential des Kristalls) eine dreifache periodische Funktion des Ortsvektors \mathbf{r} ist, $V(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = V(\mathbf{r})$ (\mathbf{a} „Gittervektor“).

Das bedeutet für die Lösung Ψ , daß sie sich bei Translation um \mathbf{a} mit einem Faktor $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{a})$ multipliziert. Der Eigenwert E ist eine Funktion des vorgegebenen Wellenvektors \mathbf{k} , die im folgenden bestimmt werden soll (und deren Kenntnis die Berechnung der Elektronendichte in den Energiebändern des Metalls ermöglicht). Es genügt, die Funktion in einem Periodizitätsbereich zu betrachten. Am Rand des Periodizitätsbereichs, wo das Potential annähernd konstant sein soll, läßt sich Ψ zerlegen in einen Anteil Ψ_{reg} , der im Mittelpunkt regulär ist, und einen Anteil Ψ_{out} , der die Form einer auslaufenden Welle hat. Die Differentialgleichung, der die Summe beider Anteile genügen muß, liefert eine lineare Beziehung zwischen ihnen

$$\Psi_{\text{out}} = S \Psi_{\text{reg}},$$

wobei der Operator S von der Form des Potentials V und der Energie E abhängt. Andererseits liefert die Periodizitätsbedingung eine weitere lineare Beziehung, nämlich daß der reguläre Anteil von Ψ sich darstellen lassen muß als Summe der von allen übrigen Periodizitätsbereichen auslaufenden Wellen

$$\Psi_{\text{reg}} = \Gamma \Psi_{\text{out}}.$$

Der Operator Γ hängt sowohl von der Energie E wie vom Wellenvektor \mathbf{k} ab, jedoch nicht von der Form des Potentials, ab. Die Kompatibilitätsbedingung beider Beziehungen liefert eine Gleichung zwischen \mathbf{k} und E . Entwickelt man Ψ_{reg} und Ψ_{out} nach einem orthogonalen Funktionssystem, so lassen sich S und Γ als Matrizen darstellen. Die Kompatibilitätsbedingung lautet dann

$$|\Gamma - S^{-1}| = 0.$$

Methoden zur Berechnung der Matrixelemente von Γ und S werden angegeben.

H. Lenz (Lehrst. f. Geometrie, TH München): Die Kernstrahlen in der Darstellenden Geometrie.

Die Aufgabe, von einem durch zwei Bilder gegebenen Gegenstand ein richtiges Bild zu konstruieren, kann nach G. Hauck mit Hilfe der Kernstrahlen gelöst werden. Spezielle Fälle werden vorgeführt, wobei die Übertragung der projektiven Kernstrahlenbüschel und z. T. auch die vorherige Konstruktion der Kernstrahlen durch die Einheitspunkte der Koordinatensachsen nach S. Finsterwalder mit dem Papierstreifen erfolgt.

R. Ludwig (TH Braunschweig): Bemerkungen zur günstigsten projektiven Abbildung von Skalen und Nomogrammen.

Eine Funktionsleiter für $f(x)$ in $x_1 \leq x \leq x_2$ von der Länge 1 kann man mit einem Verzerrungsparameter τ so projektiv abbilden, daß die Randpunkte festbleiben und der Durchlaufungssinn der Skala für $\tau > 0$ erhalten bleibt. Analog zum relativen Teilstrichabstand wird die Teilstrichkennzahl

$$T[f(x)] = f'(x)$$

definiert. Die Teilstrichkennzahl der Schar der Bildskalen ist eine Funktion von x und τ , die im Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 < \tau < \infty$ stets wenigstens eine stationäre Stelle hat. Es lassen sich Bedingungen angeben, daß diese Stelle in Sattelpunkt der T -Fläche ist. Gibt es nur eine solche Stelle, so ist diese stets ein Sattelpunkt. Die projektive Bildskala, die dem τ_0 für den Sattelpunkt entspricht, soll als die günstigste Abbildung der Skala bezeichnet werden, da sie in der Umgebung des Sattelpunktes der linearen Skala am nächsten kommt.

Eine kollineare Abbildung eines Fluchtliniennomogrammes mit wenigstens zwei geradlinigen Skalen läßt sich so bestimmen, daß für diese beiden Skalen die günstigsten Verzerrungsparameter τ_1 und τ_2 vorgeschrieben werden; der Verzerrungsparameter einer dritten geradlinigen Skala ist dadurch festgelegt. Für diese nomographischen Zwecke ist es oft günstiger eine Kollineation statt durch 4 Punktepaare durch 3 Punktepaare und zwei Verzerrungen zu bestimmen.

W. Händler (Nordwestdt. Rundfunk/Forschung, Hamburg): Zur Nomographierbarkeit höherer Funktionen.

Als neuere Entwicklungsrichtung in der Nomographie kann die systematische Untersuchung der Nomographierbarkeit von bestimmten Funktionenklassen gelten. Funktionen komplexer Veränderlicher $F(w, z) = 0$ wurden insbesondere von I. A. Willner untersucht [MATH. Z. UdSSR 27, —46, 1950, Heft 1].

Hierbei soll die Lösung als eine Fluchtgerade in einem Nomogramm mit Funktionsleitern dargestellt werden ($a, b, p, q; z = a + ib, w = p + iq$). läßt man zu, daß bis zu zwei der Funktionsleitern krummlinig sein können, so ist als Bedingung für die Nomographierbarkeit notwendig und hinreichend, daß die folgenden Differentialparameter mit $u = dw/dz$

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \frac{1}{2} ((\ln u)''/u^2)' / 4u^2 (\ln u)' \\ I_2(u) &= - (u^3/2u') ((\ln u)''/u^4)' \quad \dots (1) \\ I_3(u) &= (u^5/2u') ((\ln u)''/u^2)' / uu' \end{aligned}$$

konstant und reell sind. Sämtliche nomographierbaren Funktionen können im übrigen aus der Integration einer der beiden folgenden Differentialgleichungen gewonnen werden:

$$w''^2 = I_1 w'^6 + I_2 w'^4 + I_3 w'^2 \quad \dots (2)$$

$$z''^2 = I_1 \dots + I_2 z'^2 + I_3 z' \dots (3)$$

Lösungen von (2) bzw. (3) sind neben einer Reihe bekannter elementarer Funktionen die elliptischen Integrale

$$w - w_0 = \int_0^{\gamma(z-z_0)} (1 - k^2 \sin^2 \xi)^{-1/2} d\xi \quad \dots (4)$$

mit reellem k^2 , M , γ^2 , bzw.

$$w - w_0 = Nk/(1-i) \int_0^{\gamma(z-z_0)} (1 - k^2 \sin^2 \xi)^{-1/2} d\xi \quad \dots (5)$$

mit reellem N und γ^2 sowie $|k'| = 1$ und $\bar{k} = \pm ik/k'$.

Von diesen beiden Grundformen gelangt man auf dem Wege über bekannte Beziehungen z. B. zwischen den ellipt. Funktionen Jakobis und Weierstrass zu einer Reihe von anderen Nomogrammdarstellungen. Für einen festen Modul $k = \text{konstant}$ erhält man zunächst ein Nomogramm mit 2 geradenlinigen Leitern für a und b (nach Voraussetzung) und mit 2 krummlinigen Leitern für p und q in Form eines Kegelschnittes. Variiert man den Modul k , so erhält man ein ganzes Kegelschnittbündel und kann mit einem einzigen Nomogramm den ganzen Wertevorrat einer elliptischen Funktion eines elliptischen Integrals, bzw. des Integrals oder des Logarithmus einer elliptischen Funktion in Abhängigkeit vom Modul k übersehen.

Fachsitzung B: Mechanik

Vorsitz: L. Föppl (München)

R. G. Olsson (TH Trondheim): Bemerkungen über eine Arbeit von Carathéodory.

Die Arbeit von C. Carathéodory [Z. ANGEW. MATH. MECH. 13, 71/1933] über die Bewegung eines Schlittens wird auf den Fall erweitert, daß eine seitliche Bewegung des Schlittens mit konstanter Geschwindigkeit möglich sei. Die Bewegungsgleichungen lassen sich in diesem Fall ebenfalls elementar integrieren. Es ergeben sich Analogien zum Kepler-Problem der Planetenbewegung einerseits und zum sphärischen Pendel bei sehr kleinen Ausschlägen andererseits.

Die Bewegung des Schlittens kann außer durch eine Seitenkraft gegen die Kufen auch durch eine ungleiche Reibungskraft an den Kufen entstanden gedacht sein. Wenn dies Moment konstant angenommen wird, ergibt sich der Hamilton'sche Hodograph für den Schwerpunkt des Schlittens elementar, und der Schwerpunktsweg kann durch die Fresnel'schen Integrale dargestellt werden. Wird dagegen das Moment ähnlich wie bei der Flüssigkeitsreibung der Geschwindigkeit in Längsrichtung proportional angenommen, ergeben sich Lösungen der Bewegungsgleichungen durch elliptische Integrale. Für beide Fälle sind numerische Berechnungen durchgeführt.

[Ausführliche Veröffentlichung demnächst in der Z. ANGEW. MATH. MECH.]

E. Weinell (Jena): Die Plattentheorie als asymptotisches Integrationsproblem der Elastomechanik.

Die Kirchhoff'sche Plattentheorie, auch in ihrer erweiterten Form, ist theoretisch unbefriedigend, weil sich in ihr Spannungsverteilungen erge-

en, die mit den Verträglichkeitsbedingungen im Widerspruch stehen und in einem elastischen Körper eigentlich gar nicht möglich sind.

Ausgehend von den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie wird in der vorliegenden Arbeit unter Verwendung des Euler-Maclaurin'schen Entwicklungssatzes eine elastisch-strenge Behandlung des Plattenproblems durch asymptotische Reihen angegeben. Die ersten Glieder der Entwicklung stellen im wesentlichen die Kirchhoffsche Theorie und ihre Erweiterung durch E. Reissner dar. Die Berücksichtigung weiterer Glieder gestattet die Erfüllung verfeinerter Randbedingungen bei dickeren Platten.

Der Näherungscharakter des Plattenproblems liegt hier also nicht in näherungsweise zutreffenden heuristischen Annahmen, sondern im mathematischen Näherungsprinzip der asymptotischen Darstellung.

H. Neuber (Dresden): Gesetzmäßigkeiten und Grenzwerte von Drehschwingungseigenfrequenzen.

Während für die kritischen Drehzahlen biegesteifer Wellen mit Schwinglassen einfache Beziehungen für obere und untere Schranken bekannt sind (u. a. die Formel von Dunkerley), kennt man bisher solche Grenzwerte für das Torsionsschwingungsproblem noch nicht. Für überschlägige Rechnungen mit wenig Zeitaufwand, sowie für Kontrollmöglichkeiten bei der genauen Berechnung von Drehschwingungssystemen mit beliebig vielen Massen, ist aber die Kenntnis der Frequenzschranken von großem Vorteil. Durch Einführung der elastischen Torsionsmomente anstelle der Drehwinkel als Unbekannte wird eine Differential-Differenzengleichung aufgestellt, deren Lösung eine besonders übersichtliche Determinante liefert. Die weitere Untersuchung dieser Determinante, deren Verschwinden die Frequenzgleichung gibt, läßt anschauliche Zusammenhänge des betrachteten Schwingungssystems mit einer Reihe von Ersatzsystemen erkennen, welche aus dem Hauptsystem durch teilweise Erstarrung oder teilweise Wegnahme von Steifigkeiten herstellbar sind. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Koeffizienten der Gleichung $(n-1)$ -ten Grades für das Frequenzquadrat durch die Eigenfrequenzen der Ersatzsysteme darzustellen.

Durch Verschärfung eines Satzes über die Erhöhung der Eigenfrequenzen durch Massenverringerung bzw. Steifigkeitserhöhung gelingt es ferner, auch obere Schranken für die Grundfrequenz und untere Schranken für die höchste Frequenz anzugeben, sowie — durch Vergleich der Koeffizienten höherer Potenzen — eine Reihe oberer und unterer Schranken für die übrigen Frequenzen.

[Eine ausführlichere Darlegung wird demnächst im ING. ARCH. veröffentlicht.]

E. R. Berger (TH Wien): Obere und untere Schranken für den Drillwiderstand.

Nach dem Vorgang von C. Weber [ZAMM 1931] und Hofferberth [TAHLBAU 1944] wird der Drillwiderstand als Extremalwert zweier Variationsprobleme aufgefaßt und nach den direkten Methoden der Variationsrechnung eingeschränkt. Man erhält allgemein

$$J_t \leq \int (\text{grad } T)^2 dF,$$

wenn $\Delta T = -2$ ist, bzw.

$$J_t \geq 4V^2/G, \quad V = \int T dF, \quad G = \int (\text{grad } T)^2 dF,$$

wenn T stetig und am Rande gleich Null ist.

Für die obere Schranke wird T als Potenzreihe der komplexen Koordinate $z = x + iy$ angesetzt. Man erhält eine monoton fallende Folge von Schranken, die durch die Momente des Querschnitts ausgedrückt sind. Die ersten beiden Schranken sind

$$J_I = J_p; \quad J_{II} = 4J_1 J_2 / J_p,$$

wobei J_1 und J_2 die Hauptträgheitsmomente sind, J_p das polare Trägheitsmoment um den Schwerpunkt.

Als untere Schranke ergibt sich für sternförmige Bereiche

$$J_t \geq \int_0^1 F^2 / \int_0^1 (1/p) ds,$$

wobei p der Abstand der Umfangstangente von einem willkürlich gewählten Zentrum ist. Für Dreieck und Viereck empfiehlt sich der bekannte Produktansatz für die Torsionsfunktion. Lange schmale Streifen zwischen parallelen oder schwach geneigten Geraden werden mit einem Spannungshügel überdeckt, der auch die DGL erfüllt; für die Abschluß- und Zwischenstücke werden geeignete Lösungen angegeben.

Vorsitz: H. Neuber (Dresden)

K. A. Meldahl (Gentofte): Balancieren elastischer Rotoren

F. Selig (II. Inst. f. Math. TH Wien): Der Potentialbegriff in der Motorrechnung und seine Anwendung in der Theorie dünner Stäbe.

Die Untersuchung der Stabilität dünner Stäbe unter Druck und Drehmoment erfordert die Beantwortung der Frage nach der Konservativität des vorliegenden Belastungsfalles, um zu entscheiden, ob das Dirichlet'sche Prinzip des Minimums der Formänderungsarbeit angewendet werden darf, oder die kinetische Methode herangezogen werden muß. In konservativen Systemen kann — in völliger Analogie zur Vektorrechnung — durch eine der Motorrechnung angepaßte Gradientenbildung der Kraftmotor

$$\mathbf{R} = (\mathbf{K}; \mathbf{M}_0)$$

aus einer skalaren Potentialfunktion U erhalten werden. Ausgehend von der formalen Darstellung des Geschwindigkeitsmotors als Zeitdifferentiel von Quasikoordinaten Π_i

$$\mathcal{S} = (\mathbf{W}; d\mathbf{R}/dt + \mathbf{R} \times \mathbf{W}) = (d\Pi/dt; d\mathbf{R}/dt + \mathbf{R} \times d\Pi/dt) = d\mathcal{S}/dt$$

erhält man für das Arbeitsdifferential dA

$$dA = \mathbf{K} d\mathbf{R} + \mathbf{M}_0 d\Pi.$$

Sind die Integrabilitätsbedingungen erfüllt, so kann ein Potential bestimmt werden, dessen Lagenableitung gleich dem gegebenen Kraftmotor ist.

$$\mathbf{R} = -[\partial U / \partial \mathbf{R}; (\partial U / \partial \Pi) + \mathbf{R} \times \partial U / \partial \mathbf{R}] = -dU / d\mathcal{S}.$$

Durch Einführung von allgemeinen Lagekoordinaten (Euler'sche Winkel, Rodrigues'sche Koordinaten etc.)

$$d\Pi_i = \sum A_{ij} d\lambda_j; \quad d/d\Pi_i = \sum N_{ij} d\lambda_j \quad \text{mit} \quad (N_{ji}) = (A_{ij})^{-1}$$

können spezielle Belastungsfälle untersucht werden. Die Überlegungen gelten in der Körpermechanik analog.

[Vgl. W. Rahe und F. Selig: Die Verwendung der Motorsymbolik in der Theoretischen Mechanik, erscheint demnächst in den SITZ.BER. ÖSTER. KAD. WISS.]

W. Rahe (TH Wien): Das d'Alembertsche Prinzip in Motorsymbolik und seine Anwendung auf Stoßprobleme.

In Analogie zum Geschwindigkeitsmotor wird der Begriff der „Lagenvariation“ eines starren Körpers eingeführt und eine Motorgleichung angegeben, die den bekannten Übergangsgleichungen bei Quasikoordinaten entspricht. Damit sind die Voraussetzungen für die reaktionskräftefreie Behandlung eines Systems von n starren Körpern (ohne Energiezerstreuung) mit Hilfe der Motorrechnung gegeben. Z. B. lautet das d'Alembertsche Prinzip in Lagrange'scher Fassung:

$$\sum_{k=1}^n (d\mathfrak{J}_k/dt - \mathfrak{K}_k) \mathfrak{S}_k^v = 0.$$

Darin bedeutet \mathfrak{J}_k den Impulsmotor, \mathfrak{K}_k den Kraftmotor und \mathfrak{S}_k^v die Lagenvariation des k -ten Körpers. [Dazu: W. Rahe und F. Selig: Die Verwendung der Motorsymbolik in der Theoretischen Mechanik. Erscheint demnächst in den Sitzungsber. d. Österr. Akad. d. Wiss.] Die Spezialisierung auf Momentankräfte führt auf

$$\sum_{k=1}^n (\mathfrak{J}_k' - \mathfrak{J}_k - \mathfrak{S}_k) \mathfrak{S}_k^v = 0.$$

Darin bezeichnet \mathfrak{J}_k' den Impulsmotor des k -ten Körpers nach dem Stoß und \mathfrak{S}_k die auf ihn einwirkende Stoßschraube. Aus dieser Gleichung erhält man einerseits leicht allgemeine Sätze aus der Theorie des Stoßes starrer Körper (Carnot, usw.), andererseits sind durch sie verschiedene praktische Stoßprobleme (plötzliches Auftreten von Bindungen, Stöße auf holonome und nichtholonome Systeme von starren Körpern) auf einen gemeinsamen Ansatz zurückgeführt.

G. Sonntag (TH München): Ersatz der Lochrandbelastung einer elliptisch gelochten Scheibe durch eine Belastung der ungelochten Scheibe.

An einem Beispiel soll auf eine Beziehung aufmerksam gemacht werden, mit deren Hilfe sich vielleicht neue Lösungen der ebenen Elastizitätstheorie finden lassen.

In einer unendlich ausgedehnten Scheibe herrsche der gleichmäßige Spannungszustand p_x, p_y . Wenn in diese Vollscheibe ein elliptisches Loch geschnitten wird, deren Hauptachsen in Richtung der Hauptspannungen der Vollscheibe liegen, ändert sich der ursprünglich gleichmäßige Spannungszustand in bekannter Weise. Es läßt sich nachweisen, daß diese durch das elliptische Loch in der Scheibe hervorgerufene Störfunktion ebenso hervorgerufen werden kann durch eine Belastung der Vollscheibe innerhalb der Lochkontur. Diese Ersatzbelastung verteilt sich über die Verbindungslinie der Brennpunkte der gedachten Ellipse. Mathematisch gesehen handelt es sich um die Untersuchung der analytischen Fortsetzbarkeit der Störfunktion. Die Ersatzbelastung der Vollscheibe besteht nicht aus einfachen Kräften, sondern aus Polen, die u. a. aus entgegengesetzt gerichteten Kräften bestehen, die sich auf ihrer Wirkungslinie nähern und dabei in einer Weise zunehmen, daß sich bei unendlich kleinem Abstand ein endlicher resultierender Belastungswert ergibt.

Ein ausführlicherer Beitrag wird in der Z. ANGEW. MATH. MECH. erscheinen.

Fachsitzung C: Strömungslehre

Vorsitz: R. Sauer (München)

K. Oswatitsch und L. Sjödin (Königl. TH Stockholm): Kegelige Strömung in Schallnähe. (Vorgetr. von K. Oswatitsch)

Die Überschallströmung um achsial angeströmte Kreiskegel ist von mehreren Autoren berechnet und in Form von Kurven oder Tabellen wiedergegeben worden. Alle diese Ergebnisse reichen jedoch bei schlanken Kegeln in Schallnähe nicht aus. Deshalb wird das Problem hier für diesen speziellen Mach-Zahlbereich gelöst. Wesentlich ist es dabei, sich von Singularitäten, die auf der Kreiskegelachse auftreten, frei zu machen. Im Sinne der Ähnlichkeitsgesetze darf man sich auf einen einzigen Parameter beschränken. Mit Hilfe des Äquivalenzsatzes von Oswatitsch gelingt die Berechnung der Strömung um kegelige Körper beliebigen Querschnittes bis zu erheblichen Spannweiten. Daraus ergibt sich ohne weiteres die Ablösungsmachzahl der Kopfwelle für Dreiecksflügel.

S. F. Erdmann und K. Oswatitsch (Königl. TH Stockholm): Lineares Charakteristiken-Verfahren für angestellte Rotationskörper und Ringflächen in Überschallströmung. (Vorgetr. von S. F. Erdmann.)

Ausgehend von der linearen Potentialgleichung für das unsymmetrische Teilpotential F in Zylinderkoordinaten

$$\beta^2 \cdot F_{xx} - F_{rr} - r^{-1} \cdot F_r + r^{-2} \cdot F = 0$$

lassen sich mit $\beta^2 = M(\infty)^2 - 1$, $F_x = u$ und $F_r = v$ entlang der Charakteristiken die Proportionalbeziehungen

$$d(\beta r u) = \pm r d(v + F/r)$$

ableiten. Entlang einer nach außen gerichteten Charakteristik $\xi = \text{const}$ gilt das positive und längs der nach innen gerichteten das negative Vorzeichen.

Die neuen Variablen $\beta r u$ und $v + F/r$ ändern sich in stetig veränderlichen Strömungsfeldern relativ wenig, wodurch es möglich wird, mit verhältnismäßig großen Schritten zu arbeiten. Für den Grenzfall $v + F/r = \text{const}$ erhält man mit dem Potentialansatz $F = r + r^{-1} \cdot h^2(x)$ an schlanken Körpern der Kontur $r = h(x)$ direkt die bekannte erste Näherung von Tsien

$$u(h) = 2 h dh/dx.$$

Die Berechnung erfolgt leicht in Form einer Konstruktion in der Geschwindigkeitsebene $v + F/r$, $\beta r u$ für feldinnere Punkte und erfordert etwa numerische Rechnung am Rand.

[Es ist vorgesehen, daß diese Arbeit in der ZFW erscheinen soll.]

M. Schäfer (Göttingen): Über die stetige Rückkehr von Überschallströmungen in den Unterschallbereich bei gemischten Strömungsfeldern.

Beobachtungen an Hochgeschwindigkeitskanälen wie an Tragflügeln mit lokalen Überschallbereichen ergeben, daß im Kompressionsgebiet der Gasströmung der Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeit anscheinend immer unstetig (durch Verdichtungsstoß) erfolgt. Daher wird vielfach dieser Sachverhalt als allgemeine Regel ausgesprochen. Andererseits

its hat für ebene Potentialströmungen in gemischten Unterschall-Überschallfeldern bereits Tschapligin im ganzen Feld analytische Spezialösungen angegeben. Zur Klärung dieser umstrittenen Frage wird gezeigt, daß singularitätenfreie Nachbarlösungen auch bei etwas abgewandelten Randbedingungen (Störungen) existieren. Mittels der einheitlichen Charakteristikenmethode des Verf. wird eine strenge Lösungsmethode angegeben sowie ein angepaßtes Näherungsverfahren erprobt. Die Berechnung des gehörten Gesamtfeldes wird für zwei konkrete Beispiele durchgeführt.

C. Heinz (Lörrach): Überschallströmungen um langsam endelnde Drehkörper.

Das Singularitätenverfahren von v. Kármán, Moore und Tsien zur Berechnung der stationären Überschallströmung um schlanke Drehkörper wurde von Sauer auf pendelnde Drehkörper ausgedehnt. Es wird eine Methode angegeben, die die hierbei auftretenden Volterra'schen Integralgleichungen durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen ersetzt. Dies bringt für die numerische Behandlung einige Vorteile mit sich; vor allem macht die Behandlung von Knicken in der Kontur des Drehkörpers keine Schwierigkeiten mehr.

Vorsitz: W. Kaufmann (München)

A. Basch (TH Wien): Zur Differentialgeometrie der ebenen Strömung von Gasen.

Aus den Differentialgleichungen, die bei Gasen an Stelle der für unzumindrückbare Flüssigkeiten bei stationärer ebener Strömung geltenden Cauchy-Riemann'schen Gleichungen treten, werden unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung und unter Voraussetzung adiabatischen Charakters der Zustandsänderungen Folgerungen für das Strömungsbild gezogen. Der von jeglicher Einheitenwahl unabhängige Gradient des Logarithmus des Geschwindigkeitsbetrages kann in einfacher Weise aus dem Strömungsbild (Niveaulinien des Geschwindigkeitspotentials und Stromlinien) gefunden werden. Er ist in jedem Feldpunkt der Vektor, welcher vom Feldpunkt zum Pol der Cesàro-Geraden (d. i. die Verbindungsgerade der Krümmungsmittelpunkte von Stromlinie und Niveaulinie) bezüglich einer Ellipse bei Unterschallgeschwindigkeit oder einer Hyperbel bei Überschallgeschwindigkeit führt. Der Mittelpunkt der Ellipse oder der Hyperbel ist der betrachtete Feldpunkt. Die in die Tangente der Niveaulinie fallende kleine bzw. reelle Achse entspricht der Einheit, während die in die Tangente der Stromlinie fallende große bzw. imaginäre Achse gleich t

$$1 : \sqrt{1 - W^2/c^2} \text{ bzw. } 1 : \sqrt{W^2/c^2 - 1},$$

wobei W die Strömungsgeschwindigkeit, c die adiabatische Schallgeschwindigkeit in dem betrachteten Feldpunkt bedeutet.

H. Stetter (Math. Inst. d. TH München): Zum Wechselwirkungsproblem im Überschallbereich.

Als „Wechselwirkungsproblem“ bezeichnet man die Bestimmung der Strömung um einen Drehkörper mit angesetzten Tragflügeln. Zur Lösung dieses Problems im Überschallbereich in linearisierter Näherung, insbesondere zur Bestimmung der Druckverteilung auf den Tragflügeln, hat man einerseits die Methoden der „slender body theory“ und andererseits einige strengere Verfahren von Ferrari, Morikawa, Nielsen u. a. Die

ersteren Verfahren liefern für praktisch vorkommende Flugkörper sehr unzureichende Ergebnisse, die letzteren sind durchweg sehr kompliziert und im Ergebnis trotzdem nicht restlos befriedigend.

Demgegenüber wurde im Referat gezeigt, wie man durch eine einfache Überlegung und (bei Flügeln mit Überschallvorderkante) ohne großen Rechenaufwand die Druckverteilung in einem Teil des Flügels streng, im Restgebiet näherungsweise erhält (vor, bzw. hinter der vom Flügelansatzpunkt ausgehenden Mach-Linie). Dazu wird die Einwirkung des Rumpfes auf den Flügel streng berücksichtigt, die Rückwirkung des Flügels auf den Rumpf dagegen weitgehend vernachlässigt. Mittels des Kalküls der Distributions-theorie erhält man eine Integraldarstellung für die Druckverteilung. Es zeigt sich, daß sich die Einwirkung des Rumpfes wie eine Verwindung des Tragflügels äußert. Für den Fall eines unendlichlangen Zylinderrumpfes wurden einige Beispiele vorgeführt. Man sieht, daß bei Normierung des Druckkoeffizienten mit dem örtlichen Druckkoeffizienten des freien Flügels der Einfluß von Vorderkante und Mach-Zahl mit einer für praktische Zwecke meist ausreichenden Genauigkeit herausfällt.

[MITT. DEG 2 d. Math. Inst. d. TH München, März 1954.]

H. Schubert und E. Schincke (Halle/Saale): Zur Ermittlung von Unterschallströmungen mit der Transformationsmethode bei quadratischer Approximation der Adiabate (Vorgetragen von H. Schubert).

Durch Übergang zur Hodographenebene wird die Kontinuitätsgleichung für die Stromfunktion einer kompressiblen Unterschallströmung um ein gegebenes Profil nicht wie bei Tschaplygin und bei Sauer auf die Laplace'sche Potentialgleichung sondern auf die Schwingungsgleichung transformiert und gezeigt, daß die zugehörigen Druck-Dichte-Beziehungen eine quadratische Approximation der Adiabatenkurve gestatten. Ferner wird in der Hodographenebene die Singularität ermittelt, die die Stromfunktion im Bildpunkt der Grundströmung besitzt.

FREITAG, DER 23. APRIL 1954

Vormittag

**Allgemeine Sitzung: Ausbildung und Stellenvermittlung
der Diplom-Mathematiker**

Vorsitz: H. Görtler (Freiburg)

Es wurden 1 Referat (H. Görtler) und 4 Korreferate (A. Siemens, Erlangen; H. Kracke, Köln; H. Blenk, Braunschweig; W. Kann-
rießer, Stuttgart) zum Thema „Ausbildung und Stellenvermittlung der
Diplom-Mathematiker“ gehalten. An die Vorträge schloß sich eine Diskus-
sion an.

[Referate und Auszüge aus der Diskussion erscheinen Ende Juli 1954 als
Broschüre im Physik-Verlag Mosbach.]

Allgemeine Sitzung

Vorsitz: G. Schulz (Stuttgart)

A. Linder (Genf): Beziehungen zwischen biologischen, medizinischen und industriellen Anwendungen statistischer Verfahren.

Jedes statistische Verfahren darf nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen angewandt werden. Diese Voraussetzungen können jedoch in den verschiedensten Anwendungsgebieten gegeben sein. Im folgenden werden dafür einige Beispiele angeführt:

Die „Probit“-Methode, die im wesentlichen eine Ausgestaltung des Verfahrens darstellt, das man unter der Bezeichnung „Hazen'sche Gerade“ kennt, wurde auf Grund ihrer Wichtigkeit in der Toxikologie entwickelt. Sie kann auch zur Feststellung der Haltespannung eines Isolators in der Elektrotechnik benützt werden. Sie dürfte auch in der Chemie gute Dienste leisten, wenn die Schwelle eines Bestimmungsverfahrens anzugeben ist.

Der von Shewhart für die Überwachung der industriellen Fertigung beschaffene Kontrollstreifen kann in medizinischen, insbesondere physiologischen Untersuchungen verwendet werden. Das Trennverfahren (discriminatory analysis) wurde von R. A. Fisher im Zusammenhang mit geneischen und anthropologischen Fragestellungen eingeführt. Es läßt sich aber auch bei der Untersuchung von Eigenschaften von Stählen verwenden. Eine weitere Anwendung betrifft die zweckdienliche Auswertung von Versuchen zur Verhinderung von Zahnschäden durch Anwendung von Fluor. Das Problem der medizinischen Diagnosen dürfte durch die Anwendung des Trennverfahrens in vielen Fällen einer Lösung nähergebracht werden.

Die Methoden der industriellen Abnahmeprüfung, insbesondere in der Form der begrenzten Folgeprüfung werden sich auch in der Medizin beim Vergleich von Heilmitteln oder Behandlungsvorfahren verwenden lassen.

Das im landwirtschaftlichen Versuchswesen eingeführte „lateinische Quadrat“ hat sich auch in der industriellen Forschung als wertvoll erwiesen, ebenso die neueren Methoden der Anordnung und Auswertung von Versuchen mit mehreren Faktoren. In Feldversuchen mit vielen Sorten verwendet man mit Vorteil „unvollständige Blöcke“. Die diesem Verfahren zugrundeliegenden Grundsätze finden neuerdings auch in der medizinischen Forschung Verwendung.

Fachsituation A: Angewandte Mathematik

Vorsitz: H. Cremer (Aachen)

L. Holzer (Rostock): Laplace-Transformation der Besselfunktionen.

Es wird von der Darstellung der Laplace-Transformierten der Besselschen Funktion J_a mit $\operatorname{Re} a > -1$, nämlich dem Integral

$$(1/\pi i) \int (z^2 - 2pz - 1)^{-1} z^{-a} dz$$

ausgegangen. Hierbei ist in der z -Ebene der Integrationsweg wie folgt angeordnet: Von $z = -\infty$ bis zu $z = -1$, hierauf in negativem Sinne um den Einheitskreis herum, sodann nach $z = -\infty$. Es wird darauf hingewiesen, wie durch geschickte Abänderung des Integrationsweges daraus die bekannten Rekursionsformeln für die Besselschen Funktionen

$$J_{a-1} + J_{a+1} = 2 J_a/x; J_{a-1} - J_{a+1} = 2 J_a'$$

gefolgt werden können, weiter die Entwicklung von x^a in Reihen nach J_{a+2k} , $k = 0, 1, 2, \dots$, ebenso die derselben Funktion in Reihen nach $x^k J_{a+2k}$; auch das Multiplikationstheorem der Bessel-Funktionen, die

Reihenentwicklung von $\int_0^x J_a(\xi) d\xi$ sowie andere Formeln gestatten eine überaus einfache Herleitung.

[Der Stoff des Vortrags findet sich in einem demnächst im Deutschen Verlag der Wissenschaften erscheinenden Buch des Vortragenden „Besselsche Funktionen“.]

J. Dörr (Darmstadt): Funktionentheoretische Methoden bei Übertragungs- und Regelungsproblemen.

Die Eigenschaften eines Übertragungssystems lassen sich mathematisch in einer sogenannten Übertragungsfunktion zusammenfassen. Sie beschreibt das Amplitudenverhältnis zwischen harmonischen Ursachen und den zugehörigen harmonischen Wirkungen. Demgemäß lassen sich die von allgemeinen Ursachen ausgelösten Wirkungen durch Integrale darstellen. Stellt man sich die Aufgabe, Übertragungssysteme mit speziellen Eigenschaften zu erhalten, so kann man häufig transzendente oder algebraische Übertragungsfunktionen angeben, die den Forderungen in mathematischer Hinsicht genügen. Zur technischen Realisierung solcher Systeme eignen sich aber im allgemeinen nur gebrochen rationale Funktionen. Zu diesem Zweck müssen die transzendenten oder algebraischen Übertragungsfunktionen durch gebrochen rationale Funktionen approximiert werden. Dieses „Realisierungsproblem“ wird am Beispiel der „Fundamentalen Übertragungsfunktion des elektrischen Tiefpasses“ mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden behandelt.

R. Albrecht (München): Iterationsverfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete auf einen Kreisring.

Durch Verallgemeinerung der von E. Graeser und Y. Komatu angegebenen Verfahren werden weitere praktische Iterationsverfahren gewonnen. Das Abbildungsproblem wird dabei ohne Verwendung der un-

ersellen Überlagerungsfläche auf die Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete zurückgeführt, wobei die iterierten Funktionen elementarer Natur sein können, sodaß auch eine einfache graphische Durchführung der gewünschten Abbildung möglich ist.

[Erscheint in den SITZ.BER. d. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Klasse.]

F. Stallmann (Justus-Liebig-Hochschule, Gießen): Untersuchung spezieller Funktionen der Potentialtheorie mit Hilfe der konformen Abbildung.

Die Separation der Potentialgleichung bzw. der Wellengleichung in rummlinigen Koordinaten führt auf gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten. Solche Differentialgleichungen werden auch untersucht in der Theorie der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen, und es zeigt sich, daß die dabei benutzten Methoden mit Erfolg zur Untersuchung der speziellen Funktionen der Potentialtheorie herangezogen werden können. Hierdurch lassen sich die charakteristischen Eigenschaften jener Funktionen sehr anschaulich und übersichtlich darstellen und man erhält manche Einblicke in das noch wenig ersichtete Verhalten jener Funktionen im Komplexen. Auch für numerische Untersuchungen ist das Verfahren recht geeignet. Eingehende Untersuchungen sind vom Verfasser durchgeführt für Lamé'sche, Mathieu'sche und phäroidfunktionen; ihre Ergebnisse sollen demnächst veröffentlicht werden.

Vorsitz: W. Schumann (München)

G. Colombo (Math. Seminar d. Univ. Padua): Über die erzwungenen Schwingungen in einem Kondensatorkreise mit Eisenkernspule.

Aus der Erfahrung weiß man, daß man in einem Kondensatorkreise mit Eisenkernspule subharmonische Schwingungen erhält, wenn man eine periodische Spannung anlegt. Diese subharmonischen Schwingungen lassen sich erklären, wenn man die starke nicht-lineare Abhängigkeit des magnetischen Flusses im Eisenkern von der Stromstärke der Spule in Betracht zieht. Die elektrische Ladung x gehorcht der folgenden nicht-linearen Differentialgleichung:

$$L(dx/dt) \, d^2x/dt^2 + R \, dx/dt + (1/C) \, x = E(t).$$

Es gelten die folgenden Voraussetzungen: (a) die Funktionen $L(dx/dt)$, $E(t)$ seien stetig einschließlich ihrer ersten Ableitungen; überdies sei $L(dx/dt)$ eine gerade, $E(t)$ eine ungerade Funktion; $E(t)$ besitze die Periode $2T$. (b) E , L_1 , L_2 , σ , δ , K sind positive Konstanten, ε_1 , ε_2 sind gerade Funktionen von dx/dt , und η_1 , η_2 Funktionen von t , welche der Gleichung

$$\eta_2(t+T) = -\eta_1(t)$$

genügen; sodann setzen wir

$$L(dx/dt) = \begin{cases} L_1 + K \, \varepsilon_1(dx/dt) & \text{für } |dx/dt| \geq I_s - \sigma \\ L_2 + K \, \varepsilon_2(dx/dt) & \text{für } |dx/dt| \leq I_s + \sigma \end{cases}$$

$$E(t) = \begin{cases} E + K \, \eta_1(t) & \text{für } \delta \leq t \leq T - \delta \\ E + K \, \eta_2(t) & \text{für } T + \delta \leq t \leq 2T - \delta, \end{cases}$$

abei seien K , σ , δ hinreichend klein, während E , L_1 , L_2 , R , C , I_s günstigen qualitativen Bedingungen genügen. (c) $L(dx/dt)$ sei monoton für

$$I_s - \sigma \leq dx/dt \leq I_s + \sigma,$$

E (t) sei monoton für

$$0 \leq t \leq \delta, T - \delta \leq t \leq T + \delta, \text{ usw.}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird bewiesen, daß eine periodische Lösung mit der kleinsten Periode $6T$ existiert. Diese Lösung ist stabil, d. h. die Lösungen der Differentialgleichung differieren nicht mehr als um eine gewisse Größe von der periodischen Lösung, sofern deren Anfangsbedingungen genügend nahe bei den Anfangsbedingungen der periodischen Lösung liegen.

[Diese Arbeit wird in *REND. SEM. MAT. PADOVA* 22, 1954/55 veröffentlicht.]

E. Schwarz (Forschungsinstit. f. Math. d. Dt. Akad. d. Wiss., Berlin): Nomogramme zur Ermittlung der magnetischen Feldstärke in stromdurchflossenen dünnen Zylinderspulen.

Es werden Nomogramme beschrieben, welche die Radial- und Axialkomponente der magnetischen Feldstärke in stromdurchflossenen dünnen Zylinderspulen in der gleichen Art zu ermitteln gestatten, wie das 1952 von A. Weigand angegebene Verfahren.

Dieses Verfahren erlaubt im Gegensatz zu älteren Methoden die Bestimmung der Feldstärkekomponenten nicht nur in Punkten der Achse sondern in allen Punkten des Feldes. Es führt allerdings der Natur des Problems entsprechend auf ziemlich komplizierte Formeln, deren numerische Auswertung für den Praktiker mühsam ist.

Aus dem Gleichungssystem wurden neue Zusammenhänge abgeleitet, welche eine nomographische Vertafelung zulassen und auf zwei einfach zu handhabende Nomogramme führen, sodaß dem Praktiker nunmehr ein rationelles Berechnungsverfahren zur Verfügung steht.

[Vgl. *DT. ELEKTROTECHN.* 8, 83—87, 1954, Heft 3].

R. Lüst, A. Schlüter und Treffitz (Max-Planck-Institut f. Physik, Göttingen): Verallgemeinerte Multipolfelder. (Vorgetr. von R. Lüst.)

Zur Untersuchung von zylindersymmetrischen Vektordifferentialgleichungen, insbesondere um sie in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen, werden skalare und vektorielle verallgemeinerte Multipolfelder definiert. Anstelle des Potentials der Punktladung lassen sich die gewöhnlichen Multipolfelder herleiten lassen, wird eine beliebige kugelsymmetrische „Stammfunktion“ $g(r)$ eingeführt. Jedes beliebige zylindersymmetrische Vektorfeld läßt sich zerlegen in ein Feld $\mathbf{Q} + \mathbf{P}$, das in der Meridianebene verläuft, und ein Feld \mathbf{T} , parallel zur Äquatorebene. Dabei bedeutet \mathbf{Q} den rotationsfreien und \mathbf{P} den divergenzfreien Anteil in der Meridianebene, während \mathbf{T} stets divergenzfrei ist. lassen sich explizite Darstellungen dieser Felder, Differentiationsformeln und algebraische Zusammenhänge angeben. Als Beispiel zur Anwendung wird eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen betrachtet, bei der die Stromlinien \mathbf{V} überall zu den Wirbellinien $\mathbf{rot V}$ parallel verlaufen.

G. Lyra (Math. Inst. d. Univ. Göttingen): Über eichinvariante Kennzeichnung der Räume konstanter Krümmung.

Im Anschluß an Arbeiten von E. Scheibe und dem Vortragenden in Bd. 54 und 57 der *MATH. Z.* gibt diese differentialgeometrische Untersuchung die Anwendung einer erweiterten Riemann'schen Geometrie auf Räume konstanter Krümmung. Die physikalische Deutung dieser Theorie ist mit keiner der projektiven Relativitätstheorien äquivalent.

Fachsitzung B: Mechanik

Vorsitz: C. Schmieden (Darmstadt)

M. J. De Schwarz (Ist. Naz. Appl. del Calcolo, Rom): Grundzüge eines Leitfadens zur praktischen Berechnung von Kreiszyinderschalen.

Es wird über ein kleines Buch berichtet, das im Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Rom in Fortsetzung der Reihe der von diesem Institut veröffentlichten „manuali“ unter Beratung durch Prof. Ing. G. Trall in Vorbereitung ist. In diesem werden die von Aas-Jacobsen eingeführten Durchschnittstypen von Kreiszyinderschalen unter den praktisch wichtigsten Randbedingungen bis zur völligen numerischen Auswertung behandelt. Die Aas-Jacobsen'sche Lösung wird dabei in einer — auch auf sonstige Lösungsverfahren anwendbaren — Form gebracht, die das aufstellen auch anderer als der konkret behandelten Randbedingungen erleichtert und bei der die Abhängigkeitsverhältnisse vom Öffnungswinkel der Schale klar in Erscheinung treten. Einige aus den numerischen Resultaten sich ergebende einheitliche Gesichtspunkte werden hervorgehoben und zwei etwas kompliziertere Beispiele — am Längsrand zusammengefügte Schalen von verschiedenem Öffnungswinkel und Schalen mit Randlief — besprochen.

H. Schwieger und **G. Haberland** (II. Phys. Inst. d. Martin-Luther-Univ. Halle): Die vollständige Bestimmung des Biegespannungszustandes elastischer quadratischer Platten mittels des spannungsoptischen Zweischichtverfahrens und einer neuen Integrationsmethode. (Vorgetr. von H. Schwieger.)

Mit dem Zweischichtverfahren [SCHWEIZ. BAUTZG. 68, Nr. 19 + 20, 1950] ist es bekanntlich möglich, elastische Platten in geeigneter Weise spannungsoptisch zu untersuchen. Dieses Verfahren beruht darauf, die Platte aus zwei transparenten Schichten mit verschiedenen polarisationsoptischen Eigenschaften, aber möglichst mit gleichem elastischen Verhalten, schubfest zusammenzukitten [BAUPL. BAUTECHN. 3, 104, 1954] und sie in Richtung ihrer Normalen mit linearpolarisiertem Licht zu durchstrahlen. Im Gegensatz zu einer homogenen Platte entsteht hierbei ein spannungsoptischer Effekt, aus dem man die Hauptmomentenlinien und die maximalen Torsionsmomente bestimmen kann.

Die Ergebnisse, die auf diese Weise an einer quadratischen, am Rande frei aufliegenden Platte, die von einer mittigen Einzellast beansprucht wurde und den Kirchhoff'schen Bedingungen genügte, erzielt wurden, werden im einzelnen mitgeteilt. Insbesondere wird darauf eingegangen, wie man mit einer Integrationsmethode [BAUPL. BAUTECHN. 4, 174, 1954] die einzelnen Biegemomente bestimmen konnte. Die erhaltenen Werte werden dann mit den nach der Theorie von H. Hencky berechneten verglichen.

[Zusammenfass. Ber. demnächst in BAUPL. BAUTECHN. und WISS. Z. MARTIN-LUTHER-UNIV.]

Fachsitzung D: Statistik

Vorsitz: H. Münzner (Göttingen)

H. Gebelein (Bamberg): Vielfachkorrelation und Hauptachsentransformation.

Liegen n statistische Größen x_1 bis x_n vor, so führt die Frage nach jenen normierten Linearkombinationen

$$z = \sum c_i x_i \quad \text{mit} \quad \sum c_i^2 = 1,$$

für welche die Streuungen stationäre Werte annehmen, auf ein Hauptachsenproblem. Dessen Eigenwerte geben sehr durchgreifenden Aufschluß über die Besonderheiten des vorliegenden Systems, und insbesondere leistet die zum kleinsten Eigenwert gehörige Haupt(hyper)ebene in besserer Weise das, wozu man sonst eine der n im allgemeinen voneinander verschiedenen Regressionsebenen heranzieht. Es wird weiter der Zusammenhang mit diesen Regressionsebenen aufgezeigt und die Bedeutung der übrigen Hauptebenen für das statistische Problem erläutert. Schließlich wird dargelegt, welches die geometrische Bedeutung der sog. partiellen Korrelationskoeffizienten ist, und mitgeteilt, wie die Verallgemeinerung auf den n -dimensionalen Fall vor sich geht.

Fachsitzung E: Rechenmaschinen

Vorsitz: H. Piloty (München)

A. Speiser (E.T.H. Zürich): Projekt einer elektronischen Rechenmaschine an der E.T.H. Zürich.

Die im Bau befindliche ERMETH (Elektronische Rechenmaschine an der E.T.H.) arbeitet im Dezimalsystem mit gleitendem Komma; sie besitzt einen Magnettrommelspeicher mit 10 000 Speicherzellen. Eingang und Ausgang erfolgen mittels Lochkarten. Zur Erleichterung der Programmierung dient das i-Register.

[Der logische Aufbau der Maschine erscheint demnächst als „Mitteilung aus dem Institut für angewandte Mathematik an der E.T.H.“ (Verlag Birkhäuser, Basel). Schaltungstechnische Angaben werden in der Z. ANGEW. MATH. PHYS. erscheinen.]

H. Pösch und T. Fromme (Weil): Programmorganisation bei kleinen Rechenautomaten mit innerem Programm. (Vorgetr. von T. Fromme.)

Definition der Begriffe: äußeres Programm (Band oder Lochkarte) und inneres (gespeichertes) Programm. Aufbau einer Maschine des zweiten Typs mit minimalen Mitteln (nach Art: van der Poel, APPL. SCI. RES. 1952). An Hand dieses Typs werden die grundlegenden Programme aufgezählt und ihre Wirkungsweise erklärt. Es sind dies: Leseprogramm (Interpretationsprogramm für das Lochband), Programm der Grundoperationen, Zahlübersetzungsprogramm, Programme für symbolische Befehle. An Hand des Leseprogramms werden die wichtigen Begriffe wie Programmstellwert und -weiche, Text- und Adressenänderungen behandelt. Die Aufstellung der Programme auf einer solchen Maschine minimalen Typs ist auch für die Planung eines größeren Gerätes dienlich, denn sie gewährt eine gute Übersicht, welche Programme am vorteilhaftesten durch Bauteile oder Mikroprogramme ersetzt werden.

H. Rohleder (Dresden): Der dreiwertige Aussagenkalkül der theoretischen Logik und seine Anwendung zur Beschreibung von Schaltungen, die aus Elementen mit zwei stabilen Zuständen bestehen.

Widersprüche, die bei der rechnerischen Behandlung von Schaltungen auftreten, werden zum Anlaß genommen, den normalerweise verwendeten zweiwertigen Aussagenkalkül zu einem dreiwertigen zu verallgemeinern.

Die eingeführten, auf die Anschauung gestützten Grundoperationen, die um Teil von den in der mehrwertigen Logik üblichen abweichen, machen den Kalkül besonders übersichtlich. Fast alle für die Anwendung wichtigen Methoden und Sätze lassen sich vom zwei- auf den dreiwertigen Kalkül verallgemeinern. Die Schaltungen können durch Gleichungssysteme beschrieben werden. Sätze über diese Gleichungssysteme und Anwendungsbeispiele werden angegeben.

Fachsitzung C: Strömungslehre

Vorsitz: H. E. Dickmann (Karlsruhe)

K. Maruhn (Dresden): Eine hydrodynamische Existenzbetrachtung.

Betrachtet wird eine homogene inkompressible reibungsfreie Flüssigkeit, die den ganzen Raum erfüllt. Ist zur Zeit t_0 das Geschwindigkeitsfeld bzw. das Wirbelfeld gegeben, so gibt es zu diesem als Anfangsbedingung nach bekannten Existenzsätzen für ein genügend kleines Zeitintervall genau eine Bewegung der Flüssigkeit. Wir fragen nun nach der Beschaffenheit des Anfangsfeldes, damit sich stationäre (bzw. quasistationäre) Bewegungen ergeben. Als Antwort wird eine naheliegende notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, deren Herleitung die bekannten Cauchy'schen Relationen wesentlich berücksichtigt. Hierdurch wird auch ein Weg zur Konstruktion spezieller quasistationärer Bewegungen gewiesen, wie sie zum Beispiel von Lichtenstein behandelt wurden.

K. W. Mangler (Roy. Aircraft Establ. Farnborough, Hants.): Berechnung der Druckverteilung für einen langsam schwin-
denden Flügel in der Nähe der Schallgeschwindigkeit.

Auf Grund der üblichen Annahmen der instationären, linearisierten, inkompressiblen Potentialströmung erhält man eine Integralgleichung für die (komplexe) Druckverteilung über einen dünnen Flügel endlicher Spannweite, der Tauch- oder Drehschwingungen um die Querachse ausführen möge. Für langsame Schwingungen erhält man ein System von zwei Integralgleichungen für die beiden Anteile der Druckverteilung, die in Phase bzw. um eine Viertelperiode phasenverschoben mit der Flügelschwingung sind. Sie haben dieselbe Form wie die entsprechende Integralgleichung in stationärer Strömung für die tragende Fläche mit modifiziertem „Anstellwinkel“. Für Mach-Zahl Eins können strenge Lösungen für bestimmte Flügelformen angegeben werden. Als Beispiel werden Delta-Flügel diskutiert. Die Wichtigkeit dieser Ergebnisse für die Längsstabilität von schwanzlosen Flugzeugen wird kurz gestreift.

[Wird veröffentlicht in Reports and Mem., Aeronautical Research Council, London.]

N. Scholz (Braunschweig): Über die Anwendung der Impulsmethode bei Messungen an Schaufelgittern.

Die durch Ausmessung der (inhomogenen) Nachlaufströmung hinter Schaufelgittern gewonnenen Mittelwerte für Druck, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung hängen von dem Abstand der Meßebene hinter dem Schaufelgitter ab und können deshalb nicht zur Charakterisierung der Gitterströmung (Verluste, Abströmrichtung) benutzt werden. Die exakten Formeln erfordern eine verhältnismäßig mühsame Auswertarbeit. Die an den Mittelwerten anzubringenden Korrekturen lassen sich jedoch universell berechnen, wenn das Nachlaufprofil durch eine analytische Funktion ange-

nähert wird. Hierdurch wird die Auswertearbeit beträchtlich abgekürzt. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der exakten Formeln ist, wie Beispiele zeigen, im Rahmen der Meßgenauigkeit vollständig.

G. Heinrich (Wien): Erweiterte Theorie der Grundwasserströmung.

Nach einer Analyse der wirkenden Kräfte werden die Gleichungen für die Grundwasserströmung und die Korn-zu-Korn-Kräfte in verallgemeinerter Form abgeleitet. Es folgt die Formulierung der Randbedingungen und die Aufstellung einer Gleichung für die Bewegung des Grundwasserspiegels bei instationären Strömungszuständen. Die Anwendung auf die Lösung praktischer Probleme mittels der Relaxationsmethode wird an Beispielen gezeigt.

U. Domm (Föttinger-Inst. f. Strömungstechnik, TU Berlin): Die Stabilität der Kármán'schen Wirbelstraße unter Berücksichtigung realer Geschwindigkeitsprofile der Einzelwirbel.

Die nach Th. v. Kármán stabile Anordnung der Wirbel in einer Wirbelstraße wird einer neuen Betrachtung unterworfen, wobei der Einfluß der realen Geschwindigkeitsprofile der Wirbel auf die Stabilitätsbedingung berechnet wird. Dabei zeigt sich, daß der Quotient aus Straßenbreite und Straßenteilung eine Funktion der Zeit ist. Für kleine Zeiten bzw. für verschwindende Zähigkeit geht die neue Stabilitätsbedingung in die Bedingung über, die Th. v. Kármán aufgestellt hat.

Fachsitzung F: Filmvorführungen

Vorsitz: H. Schardin (Weil/Rhein)

W. Kraus (Leverkusen): Misch- und Rührvorgänge schlierenoptisch sichtbar gemacht.

Die für viele physikalisch-chem. Prozesse wichtigen Vorgänge des Mischens und Rührens werden mit Hilfe des Toepler'schen Schlierenverfahrens qualitativ phänomenologisch in Modellversuchen sichtbar gemacht und auf Agfa-Color 16 mm Schmalfilm aufgenommen. Dabei werden an einer Reihe von einfachen Grundvorgängen (Glasschmelze, Dampftropfenfall, Überschichtungen, Lösen und Quellen organischer Substanzen und Untersuchung verschiedener Rührerformen) die vielseitige Anwendungsmöglichkeit herausgestellt.

L. Föppl und **L. Mönch** (TH München): Spannungsoptik.

K. Schröder (Berlin): Nichteuklidische Bewegungen.

The Simson-Line (Sir John Cass College, England).